

CHAPITRE IV

ENSEMBLES DE NOMBRES ET RACINE

CARREE

1) Complétez par \in ou \notin , en justifiant votre réponse :

a) $\frac{10^{-6}}{(-10)^{-2} \cdot (-10)^{-8}} \dots \mathbb{N}$

b) $-3,55 \cdot 10^8 \dots \mathbb{Z}$

c) $\frac{-(-7)^4 \cdot 49}{7^5} \dots \mathbb{N}$

d) $\frac{-(-7)^4 \cdot 49}{7^8} \dots \mathbb{Z}$

e) $-3,55 \cdot 10^{-3} \dots \mathbb{Z}$

2) Dessinez un diagramme de Venn représentant tous les **ensembles de nombres** que vous connaissez, puis placez les nombres suivants sur ce diagramme :

a) -6 ; $\frac{8}{2}$; $\frac{58}{100}$; $-\frac{93}{31}$; $\frac{3}{7}$; $-\frac{2}{5}$; $3,12\overline{3}$

b) $9,5\overline{7}$; $\frac{\pi}{2}$; $-\sqrt{3}$; $\frac{63}{14}$; 2^{10} ; $\frac{0}{\sqrt{\pi}}$; $-\sqrt{36}$; $\frac{\sqrt{18}}{9\sqrt{8}}$

c) $4,3\overline{3}$; $\sqrt{5}$; $-\frac{6}{8}$; $\frac{12}{7}$; -11^2 ; $\frac{12}{3}$; $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$

3) Recopiez et complétez le tableau suivant sachant que a désigne un nombre réel positif :

| | | | | |
|------------|-----|----|---------------|----|
| a | | | | |
| \sqrt{a} | 0,3 | | $\frac{3}{2}$ | |
| a^2 | | 16 | | 81 |

- 4) Quelle est la différence entre :
- un nombre décimal et un nombre rationnel ?
 - un nombre rationnel et un nombre irrationnel ?
- 5) Complétez par \in ou \notin , en justifiant votre réponse :
- $\frac{1}{7} + \frac{5}{14} \dots \mathbb{D}$
 - $(-12)^{12} \dots \mathbb{N}$
 - $\frac{65}{15} \dots \mathbb{D}$
 - $-35 + \pi \dots \mathbb{Q}$
 - $(2\sqrt{6})^2 \dots \mathbb{N}$
 - $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \dots \mathbb{N}$
 - $0,2^{15} \dots \mathbb{D}$
 - $-3,5 \dots \mathbb{D}$
 - $(2\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2})^3 + 4(\sqrt{2})^5 \dots \mathbb{Q}$
- 6) Ecrivez les fractions suivantes sous forme de **développements décimaux périodiques** (d.d.p.) :
- $\frac{111}{9}$
 - $\frac{232}{33}$
 - $\frac{9}{26}$
 - $-\frac{147}{14}$
 - $\frac{120}{111}$
 - $\frac{22}{7}$
 - $\frac{6}{125}$
 - $-\frac{6519}{3000}$
 - $\frac{63}{56}$
- 7) Trouvez le ...
- ... 45^e chiffre derrière la virgule du d.d.p. de $\frac{10}{7}$.
 - ... 2008^e chiffre derrière la virgule du d.d.p. de $\frac{17}{13}$.
- 8) Ecrivez les d.d.p. suivants sous forme de fractions (irréductibles) de nombres entiers :

1^{re} série

- $2,\overline{7}$
- $-3,0\overline{4}$
- $11,2\overline{21}$
- $3,9\overline{2}$
- $2,0\overline{13}$
- $3,6\overline{0}$

2^e série

- $32,5\overline{123}$
- $7,69\overline{26}$
- $0,2\overline{16}$
- $8,0\overline{20202}$
- $17,95\overline{555}$
- $7,105\overline{105105}$

- c) $(13 - \sqrt{13})^2$
- d) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(2 - \sqrt{2} - \sqrt{3})$
- e) $(2\sqrt{3} + 5)^2$
- f) $(3 + \sqrt{7})^2 - 6\sqrt{7} - 16$

4^e série

- a) $(4\sqrt{3} - 3\sqrt{6})^2$
- b) $(5 + \sqrt{3})^2 - 7\sqrt{3} - 19$
- c) $(5\sqrt{2} + \sqrt{8})^2$
- d) $12 - (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$
- e) $(\sqrt{2} + 1)^2 - 5\sqrt{2}(3 - \sqrt{2})$
- f) $(\sqrt{10} - 2\sqrt{3})(\sqrt{10} + 2\sqrt{3}) - (\sqrt{3} + 1)^2$

5^e série

- a) $(2\sqrt{5} - 1)^2 + \sqrt{80} - 20$
- b) $(\sqrt{3} - 5)^2 - (2 + 5\sqrt{3})(\sqrt{12} - 1)$
- c) $4 - (2\sqrt{3} - \sqrt{5}) \cdot (2\sqrt{3} + \sqrt{5})$
- d) $\frac{6}{\sqrt{2}}$
- e) $\frac{35\sqrt{2}}{\sqrt{14}} =$
- f) $\frac{5}{\sqrt{5}} + 5\sqrt{5}$

6^e série

- a) $\sqrt{700} + \sqrt{\frac{28}{49}}$
- b) $\frac{12\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

- c) $\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{6}}$
 d) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{98}}$
 e) $\sqrt{\frac{14}{9}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{21}}$
 f) $\frac{4}{\sqrt{11+\sqrt{7}}}$

7^e série

- a) $(4-\sqrt{3})^2 - (2+3\sqrt{3})^2$
 b) $\frac{3}{1+\sqrt{7}}$
 c) $\frac{9\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-\sqrt{11}}$
 d) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$
 e) $\frac{39\sqrt{7}}{\sqrt{7}+2\sqrt{5}}$
 f) $\frac{1}{7\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$

8^e série

- a) $\sqrt{10} - 4\sqrt{90} + 3\sqrt{44} - 2\sqrt{99}$
 b) $\frac{8}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$
 c) $\frac{4\sqrt{6}}{3} - \frac{2}{3\sqrt{6}} - \sqrt{\frac{25}{6}}$
 d) $\frac{3\sqrt{6}-1}{2\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{6}+1}{3\sqrt{2}}$
 e) $\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}-1}$
 f) $\frac{2\sqrt{5}-5\sqrt{2}}{2\sqrt{5}+5\sqrt{2}}$

9^e série

- a) $\sqrt{20} + 3\sqrt{125} - 7\sqrt{500}$
 b) $\sqrt{72} + 3 - \sqrt{50} - \sqrt{25}$
 c) $-5\sqrt{8} + \sqrt{63} + 3\sqrt{32} - 7\sqrt{28}$
 d) $\sqrt{\frac{60}{8}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{75}}$

e) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{27} \cdot \sqrt{\frac{25}{6}}$

f) $\frac{12}{\sqrt{19} - \sqrt{7}}$

10^e série

a) $(3\sqrt{7} + 8)(8 - 3\sqrt{7})$

b) $\sqrt{\frac{28}{9}} \cdot \frac{\sqrt{21}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{42}}$

c) $(3 - \sqrt{5})^2 - 7\sqrt{5} + 11$

d) $2\sqrt{28} - 6\sqrt{\frac{7}{4}} + 14\sqrt{\frac{1}{7}}$

e) $2\sqrt{54} - 2\sqrt{24} - \sqrt{150} + \sqrt{6}$

f) $2\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{20}\sqrt{45}$

11^e série

a) $\sqrt{360} - \sqrt{160} + \sqrt{64 + 36}$

b) $(6\sqrt{3} - 2\sqrt{8})^2 + 24\sqrt{24}$

c) $\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$

d) $\sqrt{325} + \sqrt{52} - 3\sqrt{13} + \frac{13}{\sqrt{13}}$

e) $(\sqrt{11} + \sqrt{3})(\sqrt{11} - \sqrt{3}) - \sqrt{64}$

f) $\frac{1}{3 + \sqrt{5}} - \frac{1}{3 - \sqrt{5}}$

12^e série

a) $(13 - \sqrt{13})^2$

b) $(\sqrt{10} - 2\sqrt{5})^2 - (4\sqrt{2} - 1)(\sqrt{8} - 5)$

c) $\frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{7} + 1}$

d) $\frac{29}{3\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \sqrt{5}$

e) $\sqrt{700} + \sqrt{\frac{28}{49}} + 4$

f) $\frac{-15}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$

13^e série

a) $\frac{2\sqrt{96}}{3} - \sqrt{294} + \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{5\sqrt{10}}{3} + \frac{13}{1-2\sqrt{10}}$

c) $(\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 - (2\sqrt{3} - 5\sqrt{6})^2$

d) $\frac{2}{\sqrt{6}} - (\sqrt{27} - \sqrt{2})^2 + \sqrt{0}$

e) $\frac{1}{4-\sqrt{6}} - \frac{1}{4+\sqrt{6}}$

f) $\sqrt{2^5 \cdot 3^4 \cdot 11^3}$

14^e série

a) $\sqrt{7^3 \cdot 5^4}$

b) $(2 + \sqrt{3})(\sqrt{12} - 5)(4 - \sqrt{27})$

c) $(\sqrt{27} - 5\sqrt{12} + \sqrt{75} + 1)^2$

d) $(\sqrt{5} + \sqrt{98} - \sqrt{2})(\sqrt{72} - \sqrt{5})$

e) $(\sqrt{45} - \sqrt{245} + \sqrt{125} - \sqrt{50})^2$

f) $(\sqrt{13} - \sqrt{3})(\sqrt{13} + \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - 2)^2 - 4\sqrt{3}$

12) Comment peut-on reconnaître un nombre décimal s'il est écrit sous forme de fraction irréductible ?

13) La calculatrice a affiché : $\sqrt{5} = 2,236067977$.

a) Que représente cette valeur affichée pour le nombre irrationnel $\sqrt{5}$?

b) Donnez la valeur arrondie de $\sqrt{5}$

➤ à 0,01 près

➤ à 10^{-5} près

c) Donnez un encadrement de $\sqrt{5}$ à un millièmè près.

d) Ecrivez le double de $\sqrt{5}$ sous la forme \sqrt{a} .

14) On donne $A = 3\sqrt{11} - 5$ et $B = 3\sqrt{11} + 5$. Calculez $A + B$, $A - B$, $A \cdot B$, $\frac{A}{B}$.

15) Rangez par ordre croissant les nombres suivants (justifiez votre réponse !) :

$$D = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \quad E = \sqrt{\frac{46}{5}} \quad F = \frac{5}{2}$$

16) Dans chacune des séries de nombres suivantes, retrouvez **l'intrus** (justifiez vos réponses !) :

a) $3\sqrt{4}$; $(-\sqrt{6})^2$; $\sqrt{(-6)^2}$; $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$; $-\sqrt{6^2}$; $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$

b) $4,5$; $\frac{3}{40}$; $\sqrt{0,04}$; $3,51$; $\frac{1}{80}$

c) $\frac{15}{\sqrt{5}}$; $\frac{\sqrt{135}}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{80} - \sqrt{5}$; $\frac{45}{\sqrt{45}}$; $\sqrt{125} - \sqrt{5}$

17) Analysez si les égalités suivantes sont vraies :

a) $\sqrt{47 + 4\sqrt{33}} = 2\sqrt{11} + \sqrt{3}$

b) $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = 3 - \sqrt{5}$

c) $\sqrt{57 - 4\sqrt{135}} = 2\sqrt{3} - \sqrt{45}$

18) On donne l'expression $A = 2x^2 - x - \frac{1}{x^2}$

a) Calculez et simplifiez cette expression lorsque $x = 2 \cdot 10^{-1}$.

b) Calculez et simplifiez cette expression lorsque $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

19) Les dimensions (longueur L et largeur l) d'une rectangle sont : $L = \sqrt{160} - \sqrt{40}$ et $l = \sqrt{90} - \sqrt{10}$. Montrez que ce rectangle est un carré, puis calculez son aire.

20) On considère le rectangle BEAU tel que $BE = \sqrt{75} - \sqrt{12}$ et $EA = \sqrt{27}$.

a) Montrez que BEAU est un carré.

b) Calculez son aire et son périmètre.

21) Gérard possède un champ qui a la forme d'un triangle rectangle. Les côtés qui forment l'angle droit mesurent 0,8 hm et 40 m. Joëlle possède un champ carré de même aire que celui de Gérard. Calculez la longueur d'un côté du champ de Joëlle.

22) Ecrivez le nombre $p = \frac{(\sqrt{11} - \sqrt{3})^2}{2}$ aussi simplement que possible, puis encadrez-le par deux entiers consécutifs !

23) Résolvez les **équations** suivantes dans \mathbb{R} (*voir solutions p 13*) :

1^{re} série

a) $x^2 = 0,16$

b) $2x^2 = 98$

c) $(x+5)^2 - 36 = 0$

d) $2x^2 + 50 = 0$

e) $(x-4)^2 = 25$

f) $4x^2 = 484$

2^e série

a) $(4x)^2 = 484$

b) $(3x-1)^2 = 49$

c) $(5-8x)^2 + 4 = 0$

d) $(x+3)^2 = 49$

e) $(x-4)^2 = 81$

f) $(2x+7)^2 - (x+3)^2 = 0$

3^e série

a) $x^2 - 7x = 0$

b) $(5x+1)^2 = (3x+7)^2$

c) $2 \cdot (x-3)^2 = 32$

d) $(5-9x)^2 - (2x-11)^2 = 0$

e) $(x+3)^2 + (8x-1)^2 = 0$

f) $3x^2 - 48 = 0$

4^e série

a) $8x^2 - 32 = 0$

b) $(2x+6)^2 - (2x+5)^2 = 0$

c) $(5x-2)^2 = 64$

d) $x^2 + \frac{2}{3} = \frac{29}{3}$

e) $7x^2 - \frac{13}{7} = \frac{36}{7}$

f) $3x^2 = \frac{3}{5} - \frac{12}{7}$

5^e série

a) $(x-5)^2 - (3x+1)^2 = 0$

b) $(x-6)^2 - (2x+7)^2 = 0$

c) $3x^2 + 48 = 0$

d) $(x-3)^2 - 70 = 11$

e) $\frac{x^2}{9} - \frac{25}{4} = 0$

f) $(5x-13)^2 + (17-2x)^2 + 3 = 0$

24) a) Vérifiez si les nombres $\sqrt{7}-2$ et $3-\sqrt{5}$ sont des solutions de l'équation :

$$x^2 + 4x - 3 = 0$$

b) Vérifiez si les nombres $3-\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}-1$ sont des solutions de l'équation :

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

c) Est-ce que $1-\sqrt{7}$ est une solution de l'équation : $x^2 - 2x - 6 = 0$?

d) Vérifiez si les nombres $a = \sqrt{2} + 5$ et $b = 1 - \sqrt{6}$ sont solutions de l'équation :

$$x^2 - 2x - 5 = 0$$

25) Vrai ou faux ? Justifiez vos réponses !

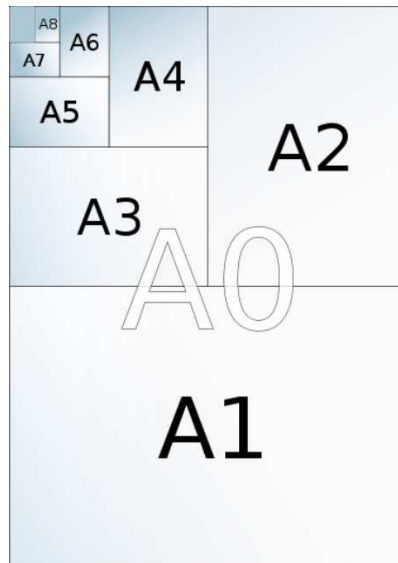
a) La moitié de $\sqrt{128}$ vaut $\sqrt{64}$.

b) La somme de $\sqrt{13}$ et de $\sqrt{15}$ vaut $\sqrt{28}$.

- c) L'inverse de $6\sqrt{3}$ vaut $\frac{\sqrt{3}}{18}$.
- d) La racine carrée de 4^9 vaut 2^3
- 26) Le format le plus courant des feuilles de papier (et des enveloppes...) vendues dans le commerce est le format DIN A où DIN est l'abréviation de « Deutsches Institut für Normung ». Cette norme, qui a été introduite pour la première fois en Allemagne en 1922, est aujourd'hui adoptée par une grande majorité de pays dans le monde à l'exception notable des Etats-Unis et du Canada.

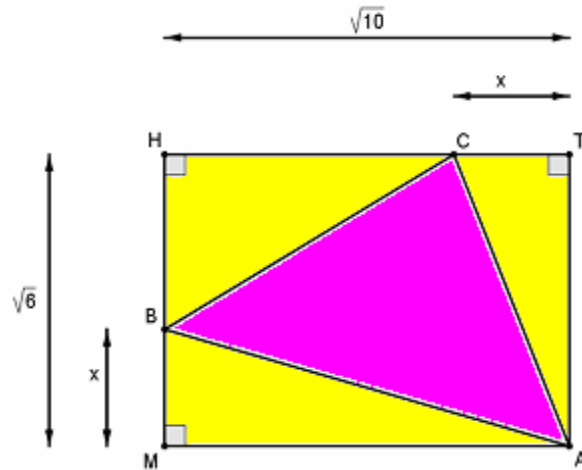
Voici comment cette norme a été construite :

- On part d'une feuille rectangulaire de longueur a et de largeur b appelée feuille DIN A0.
- On coupe cette feuille en deux feuilles de même taille suivant sa longueur et on obtient deux feuilles de dimensions DIN A1.
- On coupe une feuille DIN A1 en deux suivant sa longueur et on obtient deux feuilles DIN A2 et ainsi de suite comme le montre le schéma suivant :



- a) Donnez les dimensions des feuilles DIN A1 à DIN A8 si les dimensions de la feuille de départ DIN A0 sont :
- $a = 100 \text{ cm}$ et $b = 80 \text{ cm}$
 - $a = 100 \text{ cm}$ et $b = 50 \text{ cm}$
 - $a = 100 \text{ cm}$ et $b = 20 \text{ cm}$

- b) Pour chacune des feuilles dont vous avez calculé les dimensions en a), calculez le rapport $k = \frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$. Que constatez-vous ?
- c) Afin que toutes les feuilles DIN A aient la même « forme », on a décidé que le rapport k doit être le même pour chacune de ces feuilles. Calculez ce rapport.
- d) Sachant que l'aire de la feuille de départ DIN A0 vaut 1 m^2 , calculez ses dimensions au dixième de mm près.
- e) Calculez ensuite les dimensions d'une feuille DIN A4 et vérifiez vos calculs en mesurant une feuille de votre cahier !
- 27) En utilisant les données de la figure suivante, exprimez l'aire du triangle ABC en fonction de x et simplifiez l'expression obtenue autant que possible :



Pour quelle valeur de x l'aire du triangle ABC est-elle égale à **la moitié** de l'aire du rectangle MATH ?

SOLUTIONS

Exercice 11

1^{re} série : $4\sqrt{2}$; $10\sqrt{5}$; $6^2 \cdot 7\sqrt{7}$; $\sqrt{3}$; $65\sqrt{2}$; $5\sqrt{7} + 173$

2^e série : $5\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $14 - 12\sqrt{11}$; $8\sqrt{5} - 7\sqrt{3}$; 360 ; 1

3^e série : 5 ; $8 - 2\sqrt{7}$; $182 - 26\sqrt{13}$; $2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 1$; $20\sqrt{3} + 37$; 0

4^e série : $102 - 72\sqrt{2}$; $3\sqrt{3} + 9$; 98 ; $2\sqrt{10} + 5$; $13 - 13\sqrt{2}$; $-2\sqrt{3} - 6$

5^e série : $1; -9\sqrt{3}; -3; 3\sqrt{2}; 5\sqrt{7}; 6\sqrt{5}$

6^e série : $\frac{72\sqrt{7}}{7}; 4\sqrt{21}; \sqrt{10}; \frac{5}{7}; \frac{5\sqrt{2}}{6}; \sqrt{11}-\sqrt{7}$

7^e série : $-12-20\sqrt{3}; \frac{\sqrt{7}-1}{2}; 10+\sqrt{55}; \sqrt{5}-\sqrt{3}; 6\sqrt{35}-21; \frac{7\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{227}$

8^e série : $-11\sqrt{10}; 4(\sqrt{5}+\sqrt{3}); \frac{7\sqrt{6}}{18}; \frac{8\sqrt{2}-5\sqrt{3}}{6}; \frac{8-3\sqrt{5}}{19}; \frac{2\sqrt{10}-7}{3}$

9^e série : $-53\sqrt{5}; \sqrt{2}-2; 2\sqrt{2}-11\sqrt{7}; \frac{\sqrt{5}}{5}; 30; \sqrt{19}+\sqrt{7}$

10^e série : $1; \frac{7\sqrt{2}}{6}; 25-13\sqrt{5}; 3\sqrt{7}; -2\sqrt{6}; \frac{41\sqrt{5}}{20}$

11^e série : $10+2\sqrt{10}; 140; 7-\sqrt{35}; 5\sqrt{13}; 0; -\frac{\sqrt{5}}{2}$

12^e série : $182-26\sqrt{13}; 2\sqrt{2}+9; \frac{4-\sqrt{7}}{3}; \frac{3\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}; \frac{72\sqrt{7}+28}{7}; -\frac{15(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}$

13^e série : $-\frac{11\sqrt{6}}{6}; -\frac{2+11\sqrt{10}}{6}; \frac{19\sqrt{6}-87}{3}; \frac{19\sqrt{6}-87}{3}; \frac{\sqrt{6}}{5}; 396\sqrt{22}$

14^e série : $175\sqrt{7}; 8\sqrt{3}-7; 6767; 55-10\sqrt{10}; 3$

Exercice 23

1^{re} série : $S = \{-0,4;0,4\}; S = \{-7;7\}; S = \{-11;1\}; S = \emptyset; S = \{-1;9\};$
 $S = \{-11;11\}$

2^e série : $S = \left\{-\frac{11}{2}; \frac{11}{2}\right\}; S = \left\{-2; \frac{8}{3}\right\}; S = \emptyset; S = \{-10;4\}; S = \{-5;13\};$
 $S = \left\{-4; -\frac{10}{3}\right\}$

3^e série : $S = \{0;7\}; S = \{-1;3\}; S = \{7;-1\}; S = \left\{-\frac{6}{7}; \frac{16}{11}\right\}; S = \emptyset; S = \{-4;4\}$

4^e série : $S = \{-2;2\}; S = \left\{-\frac{11}{4}\right\}; S = \left\{2; -\frac{6}{5}\right\}; S = \{-3;3\}; S = \{-1;1\}; S = \emptyset$

5^e série : $S = \{-3;1\}; S = \left\{-\frac{1}{3}; -13\right\}; S = \emptyset; S = \{-6;12\}; S = \left\{-\frac{15}{4}; \frac{15}{4}\right\};$
 $S = \emptyset$