

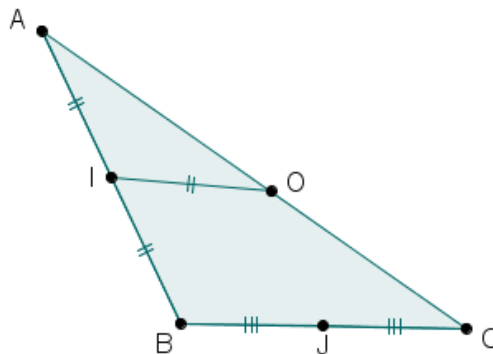
CHAPITRE V

TRIANGLE RECTANGLE

- A) Théorème du cercle de Thalès et réciproque..... p 1 (ex 1 à 5)
- B) Théorème de Pythagore et réciproque p 2 (ex 6 à 35)
- C) Théorème de la hauteur et théorème d’Euclide.... p 10 (ex 36 à 41)

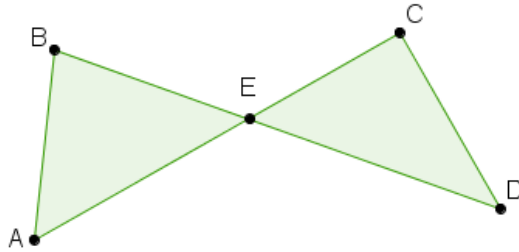
A) Théorème du cercle de Thalès et réciproque

- 1) Construire le cercle circonscrit :
 - a) d’un triangle équilatéral ABC ;
 - b) d’un triangle GHI , isocèle en H et tel que $GI = 7$ cm, $GH = HI = 4$ cm ;
 - c) d’un triangle rectangle DEF , rectangle en E et tel que $DF = 8$ cm et $DE = 6$ cm ;
- 2) a) Tracez un triangle LMN rectangle en L puis construisez son cercle circonscrit (précisez son centre et son rayon).
b) Sur la même figure, tracez trois autres triangles rectangles d’hypoténuse $[MN]$. Quelle est la propriété que vous venez d’utiliser ?
- 3) Sur la figure suivante $O \in [AC]$, $I = \text{mil}[AB]$, $J = \text{mil}[BC]$ et $IA = IB = IO$:



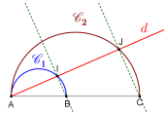
- a) Quelle est la nature du triangle $\Delta(AOB)$?
- b) Quelle est la nature du triangle $\Delta(JOC)$?

- 4) Sur la figure (non exacte) suivante on a : $DEC = 60^\circ$; $CDE = 30^\circ$; $EAB = 30^\circ$.



Démontrez que les quatre points A, B, C et D appartiennent à un même cercle.

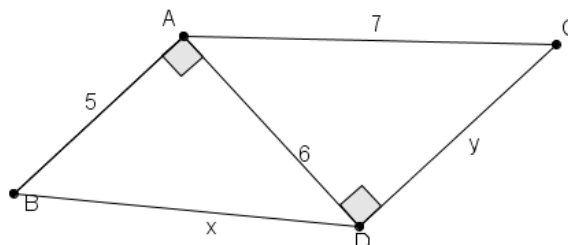
- 5) Sur la figure suivante A, B et C sont trois points alignés, \mathcal{C}_1 est un demi-cercle de diamètre $[AB]$, \mathcal{C}_2 est un demi-cercle de diamètre $[AC]$, d est une demi-droite d'origine A coupant \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 en I et J respectivement.



- a) Montrez que $(BI) \parallel (CJ)$.
 b) Soit D un point de \mathcal{C}_2 différent de A et de C et \mathcal{C}_3 le cercle de centre A passant par D .
 Quelle est la position de la droite (CD) par rapport à \mathcal{C}_3 ?

B) Théorème de Pythagore et réciproque

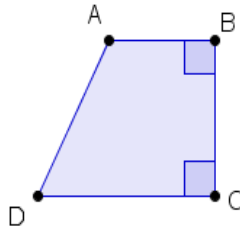
- 6) Sur la figure suivante, calculez x et y . Donnez les résultats exacts et les résultats arrondis avec trois chiffres significatifs.



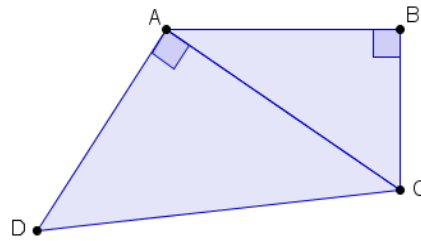
- 7) Les diagonales d'un losange mesurent 6 cm et 8 cm respectivement.
 a) Faites une figure exacte.
 b) Déterminez la valeur exacte de la longueur d'un côté du losange.

8) Calculez l'aire de chacune des figures suivantes :

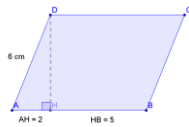
a) $AB = 5$ m , $CD = 8$ m et $AD = 6$ m



b) $AB = 8$ m , $BC = 6$ m et $CD = 12$ m



c) $AH = 2$ cm , $HB = 5$ cm et $AD = 6$ cm , $ABCD$ est un parallélogramme



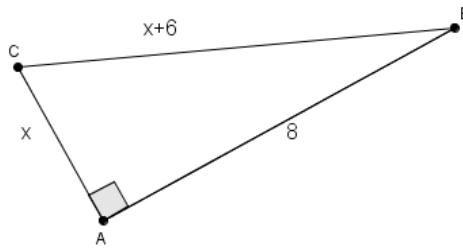
9) Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit \mathcal{C} . Calculez le rayon de \mathcal{C} sachant que $AB = 8$ cm et que O se trouve à 3 cm de $[AB]$.

10) Calculez le périmètre d'un rectangle dont les diagonales mesurent 125 cm et la largeur 44 cm.

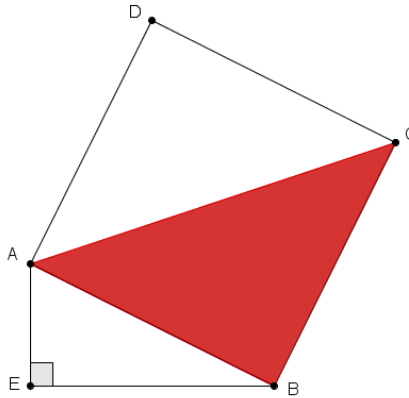
11) Soit $ABCD$ un trapèze de bases (AB) et (CD) tel que $AB = 45$, $BC = 51$, $AC = 24$ et $AD = 26$. Faites un schéma puis calculez CD .

12) Soit PQR un triangle rectangle en Q tel que $PQ = 40$ et $PR = 41$. Calculez les longueurs des **trois médianes** de ce triangle et la **hauteur** issue de Q .

- 13) Calculez x , sachant que le triangle (ABC) est rectangle en A :

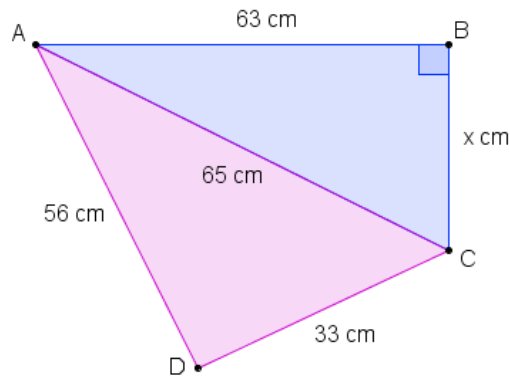


- 14) Calculez l'aire de la surface rouge sachant que $ABCD$ est un carré, que le triangle ABE est rectangle en E , que $AE = 16$ cm et que $BE = 30$ cm :

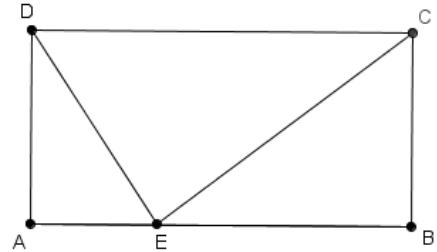


- 15) Soit ABC un triangle rectangle en A tel que b vaut $3/4$ de c (avec les notations usuelles).
Exprimez en fonction de b :
- les côtés a et c .
 - les trois médianes du triangle.
 - la hauteur issue de A .
- 16) Dans un triangle ABC isocèle en A , la hauteur issue de A et la base $[BC]$ ont même longueur x . On note H le pied de la hauteur issue de A .
- Faites une figure soignée.
 - Calculez AB et AC en fonction de x .
 - Soit $M = \text{mil}[AH]$. Expliquez pourquoi le triangle $\Delta(BCM)$ est rectangle isocèle, puis calculez BM et CM en fonction de x .
- 17) Vérifiez si les triangles suivants sont rectangles et précisez alors le sommet de l'angle droit :
- $AB = 40$, $AC = 20$ et $BC = 30$
 - $PQ = 12$, $QR = 16$ et $PR = 20$

- 18) Sur la figure (inexacte) suivante, ABC est un triangle rectangle en B .

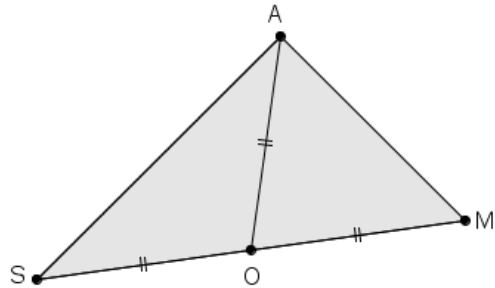


- b) Calculez x .
- c) Montrez que ACD est un triangle rectangle et précisez le sommet de l'angle droit.
- 19) $ABCD$ est un rectangle avec $AB = 13$ cm et $BC = 6$ cm. E est un point du côté $[AB]$ tel que $AE = 4$ cm. Le triangle CDE est-il rectangle ? Justifiez votre réponse par des calculs !



- 20) Soit le triangle SAM de la figure ci-contre.

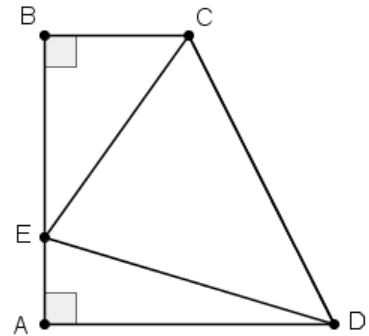
Calculez l'aire et le périmètre du triangle SAM sachant que $AM = 15$ m et $OS = OA = OM = 8,5$ m.



- 21) Donnez des constructions exactes pour des segments de longueur :

- | | |
|-------------------|-------------------|
| a) $\sqrt{10}$ cm | c) $\sqrt{27}$ cm |
| b) $\sqrt{41}$ cm | d) $\sqrt{58}$ cm |

- 22) Dans le trapèze rectangle $ABCD$ ci-contre, $E \in [AB]$, $BC = 4$ cm, $AD = 6$ cm, $AE = 3$ cm et $EB = 8$ cm.

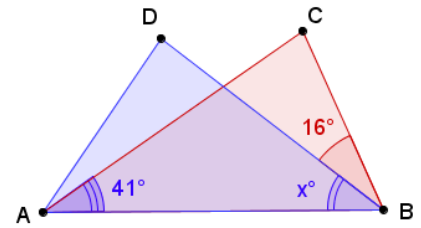


- a) Construisez la figure en vraie grandeur.
 - b) Calculez ED , EC , et CD (valeurs exactes).
 - c) Montrez que le triangle ECD est rectangle en E .
 - d) Construisez le cercle circonscrit au triangle ECD . Précisez son centre et une valeur approchée de son rayon.
 - e) Existe-t-il un deuxième point F sur $[AB]$ tel que le triangle FCD soit rectangle en F ? Justifiez votre réponse !
- 23) Soit $ABCD$ un carré de côté c dont les diagonales mesurent d .
- a) Calculez d sachant que $c = 7$ cm.
 - b) De manière générale, exprimez d en fonction de c .
- 24) (1) Soit ABC un triangle équilatéral de côté 5 cm. Calculez sa hauteur h et le rayon r de son cercle circonscrit.
- (2) Soit ABC un triangle équilatéral de côté c .
- a) Exprimez la hauteur de ABC en fonction de c .
 - b) Exprimez le rayon du cercle circonscrit de ABC en fonction de c .
 - c) Vérifiez à l'aide des formules que vous venez d'obtenir les résultats obtenus dans la 1^{re} partie de l'exercice.
- 25) Soit $ABCD$ un rectangle avec $AB = 8$ cm et $AD = 5$ cm, $M \in [AB]$ et $N \in [AD]$ avec $AM = AN = 3$ cm.
- a) Faites une figure exacte.
 - b) Analysez si le triangle MNC est rectangle.
- 26) Construisez :
- Le cercle \mathcal{C} de centre O de rayon 4 cm
 - Un point A de \mathcal{C}
 - La tangente t en A au cercle \mathcal{C}
 - Un point M de t tel que $OM = 7$ cm.

Calculez la distance AM .

27) Soient deux triangles $\Delta(ABC)$ et $\Delta(ABD)$ tel que $AB = 17$ cm, $AD = 8$ cm, $BAC = 41^\circ$, $CBD = 16^\circ$ et $DBA = x^\circ$ (voir figure ci-contre) et \mathcal{C} le cercle de diamètre $[AB]$.

- Déterminez x sachant que $C \in \mathcal{C}$.
- Déterminez le périmètre du triangle $\Delta(ABD)$ sachant que $D \in \mathcal{C}$.



28) Soit $\Delta(ABC)$ un triangle équilatéral de côté 8 cm, M le milieu de $[BC]$ et $P \in [BC]$. On note x la distance BP .

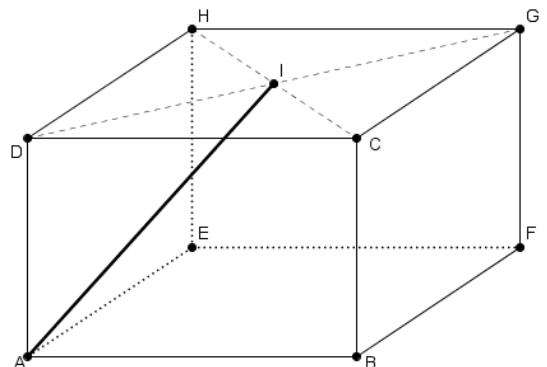
- Faites une figure.
- Quelles sont les valeurs possibles de x ?
- Exprimez la distance AP en fonction de x (distinguez deux cas : $P \in [BM]$ et $P \in [CM]$).
- Pour quelle(s) valeur(s) de x , AP est-elle maximale ? minimale ?

29) L'escargot de Pythagore

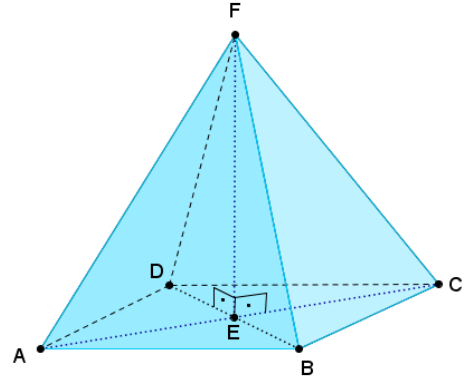
- Faites la construction suivante :
 - tracez en segment $[OA]$ de longueur 1 cm
 - construisez A_1 tel que $\Delta(OAA_1)$ est rectangle en A et $AA_1 = 1$ cm
 - construisez A_2 tel que $\Delta(OA_1A_2)$ est rectangle en A_1 et $A_1A_2 = 1$ cm
 - construisez A_3 tel que $\Delta(OA_2A_3)$ est rectangle en A_2 et $A_2A_3 = 1$ cm
 - ...
 - construisez A_n tel que $\Delta(OA_{n-1}A_n)$ est rectangle en A_{n-1} et $A_{n-1}A_n = 1$ cm
- Calculez les longueurs $OA_1, OA_2, OA_3, OA_4, \dots, OA_n$

30) $ABCDEFGH$ est un pavé tel que $AB = 8$ m, $BF = 6$ m, $BC = 5$ m. I est le centre de la face $DCGH$.

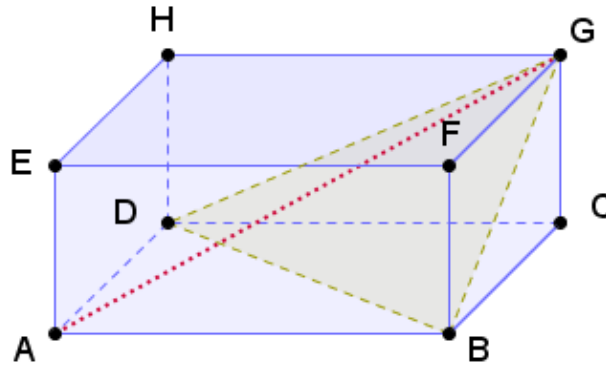
- Calculez la longueur de $[AI]$ (valeur exacte et valeur arrondie avec trois chiffres significatifs).
- Quels sont des segments sur cette figure qui ont la même longueur que $[AI]$? (sans calculs)
- Calculer le volume et l'aire de la pyramide ayant comme base $ABFE$ et comme sommet le point I .



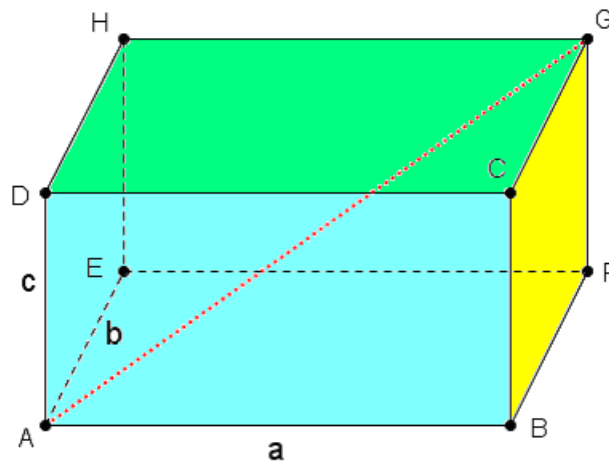
- 31) Pour la pyramide à base carrée de la figure ci-contre on sait que $(FE) \perp (AC)$, $(FE) \perp (BD)$, $AB = BC = CD = DA = 3$ cm et $FA = FB = FC = FD = 5$ cm. Calculez la longueur des diagonales de la base et la hauteur EF de la pyramide.



- 32) Soit $ABCDEFGH$ une caisse à faces rectangulaires telle que $AB = 84$ cm, $BC = 12$ cm et $AE = 5$ cm (voir figure ci-dessous).
- Est-ce qu'une sphère (boule) de rayon 43 cm peut contenir cette boîte ?
 - Est-ce que le triangle BDG est un triangle rectangle ?



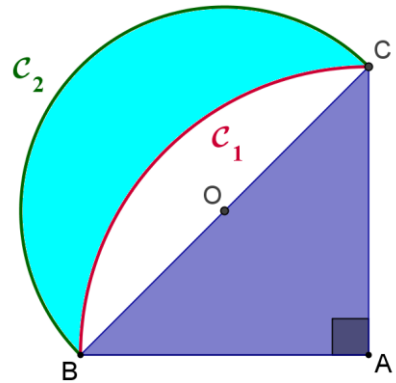
- 33) Le dessin ci-contre représente, en perspective cavalière, un prisme tel que $a = AB = 5$ cm, $b = AE = 4$ cm et $c = AD = 3$ cm.



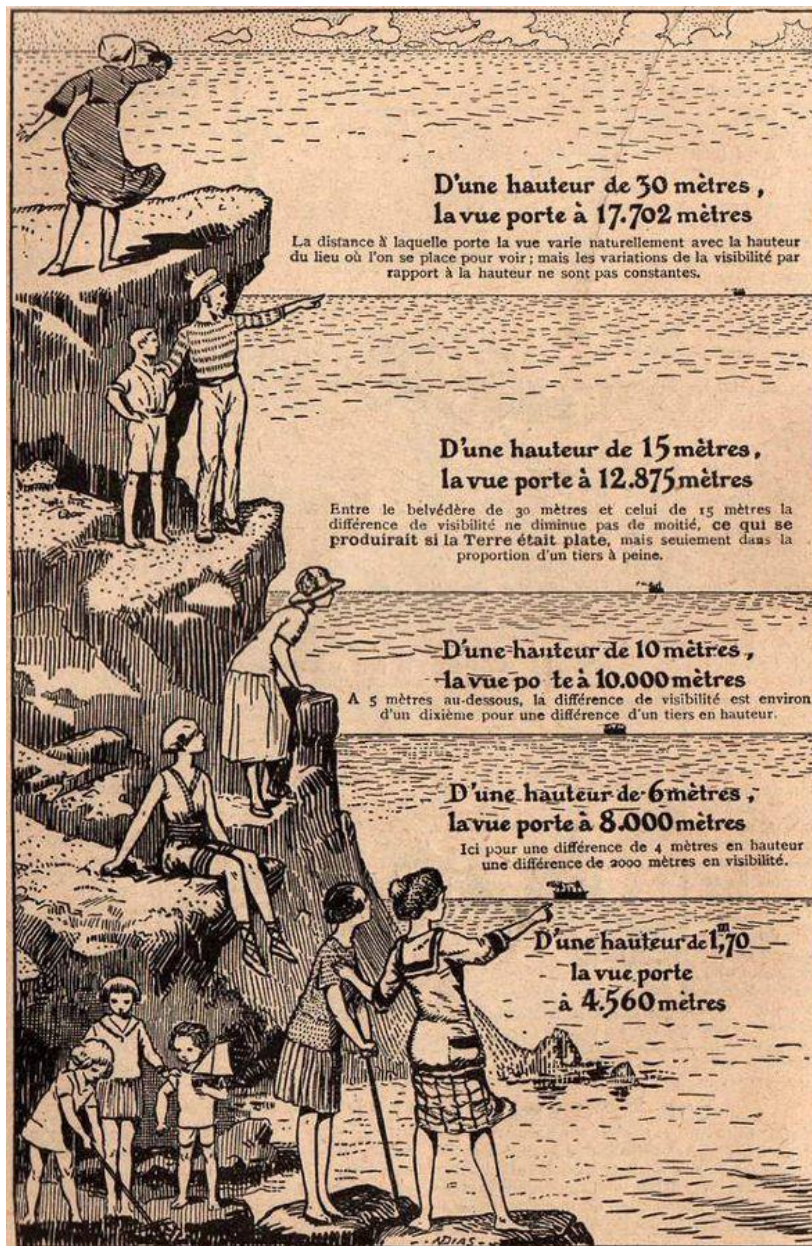
Déterminez l'expression littérale de AG en fonction de a , b et c en justifiant votre démarche. En déduire la valeur exacte de AG .

34) **La lune d'Hippocrate** (mathématicien grec du 5^e siècle avant notre ère)

Soient ABC un triangle isocèle et rectangle en A , O le milieu de l'hypoténuse $[BC]$, C_1 le quart de cercle de centre A et de rayon AB d'extrémités B et C et C_2 le demi-cercle de diamètre $[BC]$ extérieur au triangle. La surface délimitée par ces deux arcs est appelée « la lune d'Hippocrate ». Montrez que l'aire de la lune d'Hippocrate est égale à l'aire du triangle.



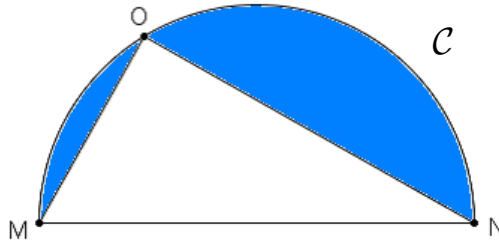
35) Observez bien l'affiche suivante :



- a) Que faut-il penser de l'affirmation au milieu de l'affiche : « ... ce qui se produirait si la terre était plate » ?
- b) Sachant que le rayon terrestre (on suppose ici que la terre a la forme d'une sphère parfaite, ce qui n'est pas tout à fait correct en réalité !) vaut à peu près 6365 km, vérifiez l'exactitude des 5 mesures données sur l'affiche. Justifiez vos calculs par une figure !

C) Théorème de la hauteur et théorème d'Euclide

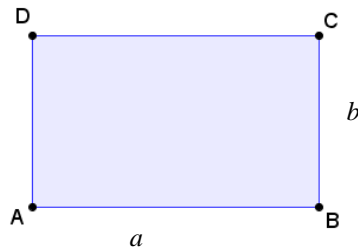
- 36) Sur la figure suivante $[MN]$ est un diamètre du demi-cercle \mathcal{C} , $MO = 28$ m et $NO = 45$ m .



- a) Quelle est la nature du triangle MON ?
- b) Calculez la hauteur de ce triangle issue de O .
- c) Calculez l'aire de la surface bleue.
- 37) Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A . Notons $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $h = AH$, $b' = HC$ et $c' = HB$. Complétez le tableau (unité = cm) suivant en présentant pour chaque cas des calculs détaillés et justifiés :

cas	a	b	c	b'	c'	h	aire
(1)	85	84					
(2)			9				180
(3)		24				6,72	
(4)				3,6	6,4		
(5)	40			14,4			
(6)				51,2		38,4	
(7)		24		23,04			
(8)	65				41,6		
(9)			11			4	

- 38) Soit un triangle ABC avec $AB = 4,8$ cm, $AC = 55$ mm, $BC = 0,73$ dm et $P \in [BC]$ (schéma !). En notant $x = AP$, quelles sont les valeurs extrêmes (la plus grande et la plus petite) de x ?
- 39) **Attention piège !** Quelle est l'aire d'un triangle rectangle ABC rectangle en A dont l'hypoténuse mesure 10 cm et la hauteur issue de A mesure 6 cm ? **Indication** : Essayez de construire un tel triangle !
- 40) **Quadrature du rectangle.** Soit un rectangle $ABCD$ de côtés a et b :



- a) Faites les constructions suivantes à la règle (non graduée) et au compas :
- Construisez le point $E \in (AB)$ tel que $BE = BC$ et $E \notin [AB]$;
 - Construisez le cercle \mathcal{C} de diamètre $[AE]$;
 - Tracez le point $F \in [BC) \cap \mathcal{C}$;
 - Construisez deux points G et H tel que $BFGH$ soit un carré.
- b) Expliquez pourquoi $ABCD$ et $BFGH$ ont la même aire.

Remarque : La construction, utilisant uniquement une règle non graduée et un compas, d'un **carré** qui a même aire qu'une figure donnée \mathcal{F} est appelée **quadrature** de la figure \mathcal{F} . Nous venons de faire la quadrature du rectangle. Pendant de nombreux siècles on a essayé de trouver une **quadrature du cercle** mais on sait aujourd'hui qu'une telle construction est **impossible** à cause d'une certaine propriété (un peu compliquée...) du nombre π ! Depuis lors on dit parfois quand on se trouve en face d'un problème qui semble impossible à résoudre : « c'est la quadrature du cercle ! »

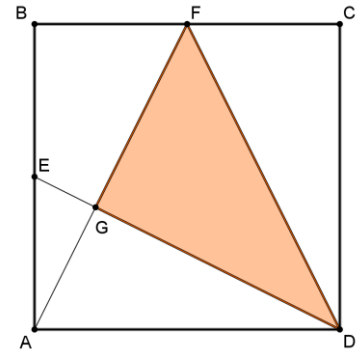
- 41) Soient les deux segments $[AB]$ et $[CD]$:



En notant $x = AB$ et $y = CD$, construisez (si possible) à la règle et au compas :

- a) un segment de longueur $\sqrt{x^2 + y^2}$
- b) un segment de longueur $\sqrt{x^2 - y^2}$
- c) un segment de longueur $\sqrt{y^2 - x^2}$
- d) un segment de longueur \sqrt{xy}
- e) un segment de longueur $\sqrt{2xy}$

42) **Un triangle 3-4-5.** Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré de côté 2, $E = \text{mil}[AB]$, $F = \text{mil}[BC]$ et G est le point d'intersection des segments $[AF]$ et $[DE]$.



- a) Que peut-on dire des deux triangles ABF et DAE ? Déterminer les valeurs exactes de AF et ED .
- b) En utilisant l'angle $\alpha = \angle BAF$, montrer que les triangles EGA et FGD sont rectangles en G .
- c) Que représente le point G pour le triangle AED ? Calculer EG , GD et AG et en déduire les côtés du triangle FGD .
- d) Expliquer pourquoi FGD est « un triangle 3-4-5 ».

43) **Triplets de Pythagore.** On dit qu'un triplet (a, b, c) de trois nombres entiers naturels a , b et c est un triplet de Pythagore ssi $a^2 = b^2 + c^2$, c'est-à-dire si ces trois nombres sont les longueurs des trois côtés d'un triangle rectangle. L'exemple le plus connu est le triplet $(5, 4, 3)$. Nous allons voir maintenant deux formules qui permettent de trouver d'autres triplets de Pythagore.

- e) Montrez que si $u, v \in \mathbb{N}^*$ avec $u > v$ alors $(u^2 + v^2, 2uv, u^2 - v^2)$ est un triplet de Pythagore.
- f) Trouvez 5 triplets de Pythagore avec la formule que vous venez de démontrer.
- g) Pour tout entier naturel u posons :

$$a = \frac{u^2 + 1}{2} \text{ et } b = \frac{u^2 - 1}{2}.$$

Montrez que $a^2 = b^2 + u^2$.

- h) Pour quels entiers u le triplet

$$\left(\frac{u^2 + 1}{2}, \frac{u^2 - 1}{2}, u \right)$$

est-il un triplet de Pythagore ?

- i) Trouvez 5 triplets de Pythagore avec cette deuxième formule.
- j) Montrez que les triplets de Pythagore trouvés avec la deuxième formule ont une propriété que ceux trouvés avec la première formule n'ont pas nécessairement.