Fiche No 8

Composées d'isométries

Une **isométrie** est une transformation du plan qui conserve les distances. Nous avons vu que les symétries axiales et centrales, les translations et les rotations sont des isométries.

1) Composée de deux symétries axiales d'axes parallèles

- Dessinez deux droites parallèles a et b : $a \parallel b$.
- Construisez un point D, $s_a(D) = D'$ et $s_b(D') = D''$, alors $D'' = s_b(s_a(D))$. On a ainsi créé une nouvelle transformation pour laquelle D a pour image D'' : c'est la **composée** des deux symétries et elle est notée $s_b \circ s_a$: $s_b \circ s_a(D) = D''$.
- Déplacez le point D et observez D'' ! Faites également varier les positions de a et b ! *Analysez en particulier la position de* (DD'') *par rapport aux droites a et b, la distance* DD'' *et la distance entre a et b.* Que constatez-vous ? Vérifiez vos hypothèses !
- Enoncez la propriété que vous venez de découvrir :

Soient a et b deux droites parallèles, alors $s_b \circ s_a =$ …………avec ……………………………………………………………………………………

- Faites une construction pour vérifier si $s_b \circ s_a = s_a \circ s_b$. Analysez votre figure et concluez :

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

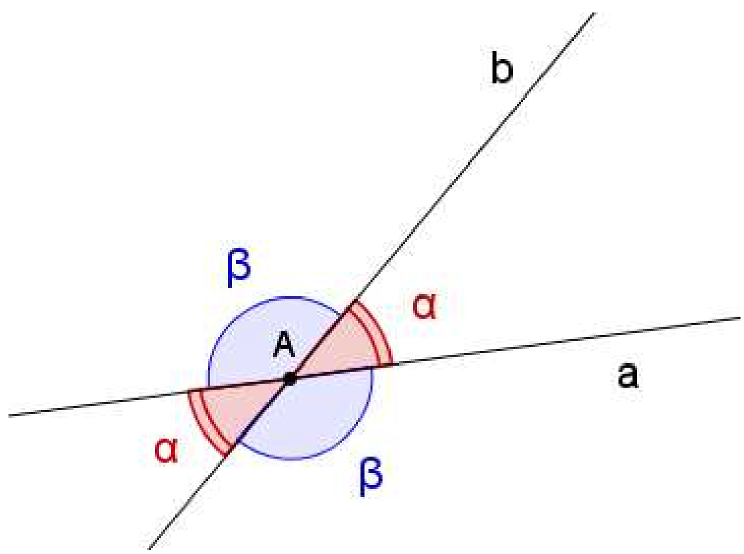
2) Composée de deux symétries axiales d'axes perpendiculaires

- Dessinez la droite $a = (AB)$ et la droite $b \perp a$ qui passe par A
- Construisez un point D, $s_a(D) = D'$ et $s_b(D') = D''$, alors $D'' = s_b \circ s_a(D)$
- Déplacez le point D et observez D'' ! Faites également « tourner » B autour de A : que constatez-vous ? Vérifiez vos hypothèses !
- Est-ce que $s_b \circ s_a = s_a \circ s_b$?
- Enoncez la propriété que vous venez de découvrir :

Soient a et b deux droites perpendiculaires qui se coupent en O, alors $s_b \circ s_a =$ …………………………………………………………………………

3) Composée de deux symétries axiales d'axes sécants

- Dessinez les droites $a = (AB)$ et $b = (AC)$ qui se coupent en A
- Il existe deux angles (opposés par le sommet, donc de même mesure) de la forme $\widehat{XAY}$ tels que $X \in a$, $Y \in b$ et $0° < \widehat{XAY} < 180°$, on les notera α ou $\widehat{aAb}$.



De même il existe deux angles (opposés par le sommet, donc de même mesure) de la forme $\widehat{XAY}$ tels que $X \in b$, $Y \in a$ et $0° < \widehat{XAY} < 180°$, on les notera β ou $\widehat{bAa}$. Mesurez α et β sur la figure.

- Construisez un point P, $s_a(P) = P'$ et $s_b(P') = P''$, alors $P'' = s_b \circ s_a(P)$
- Déplacez le point P et observez P'' ! Faites également « tourner » B autour de A : que constatez-vous ? Vérifiez vos hypothèses !
- Est-ce que $s_b \circ s_a = s_a \circ s_b$?
- Montrez que le résultat du paragraphe 2) est un cas particulier de celui-ci.
- Enoncez la propriété que vous venez de découvrir :

Soient a et b deux droites <u>sécantes</u> qui se coupent en O, alors
$s_b \circ s_a =$ ....
et $s_a \circ s_b =$ ....

4) <u>Composée de deux symétries centrales</u>

- Dessinez deux points H et K.
- Construisez les points A, $A' = s_H(A)$ et $A'' = s_K(A')$.
- Construisez de même $B'' = s_K \circ s_H(B)$ et $C'' = s_K \circ s_H(C)$.
- Déplacez les points A, B, C et observez leurs images par $s_K \circ s_H$! Que constatez-vous ? Vérifiez vos hypothèses !
- Est-ce que $s_K \circ s_H = s_H \circ s_K$?
- Enoncez la propriété que vous venez de découvrir :

Soient H et K deux points du plan, alors :
$s_K \circ s_H =$ ....
et $s_H \circ s_K =$ ....

5) Composée de deux translations

- Dessinez trois points A, B et C, puis les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
- Construisez les points P, $P' = t_{\overrightarrow{AB}}(P)$ et $P'' = t_{\overrightarrow{BC}}(P') = t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}}(P)$.
- Déplacez les points A, B, C et P : que constatez-vous ? Observez en particulier ce qui se passe quand on déplace le point B ! Que peut-on dire du quadrilatère $ACP''P$? Vérifiez vos hypothèses !
- Est-ce que $t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$?
- Enoncez la propriété que vous venez de découvrir :

Soient A, B, C trois points distincts du plan, alors : $t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} =$ ………………………………………………………………………..

6) Composée de deux rotations de même centre

- Dessinez deux points O et P.
- Construisez $P' = r_{O,\alpha°}(P)$ et $P'' = r_{O,\beta°}(P') = r_{O,\beta°} \circ r_{O,\alpha°}(P)$ pour différentes valeurs de α et β (prenez p.ex. $\alpha = 60°$ et $\beta = 85°$, puis $\alpha = 40°$ et $\beta = -105°$).
- Que constatez-vous en déplaçant P ?Vérifiez vos hypothèses !
- Est-ce que $r_{O,\beta°} \circ r_{O,\alpha°} = r_{O,\alpha°} \circ r_{O,\beta°}$?
- Enoncez la propriété que vous venez de découvrir :

Soient O un point et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors : $r_{O,\beta°} \circ r_{O,\alpha°} =$ ………………………………………………………………………..

7) Composée de deux rotations de centres différents

- Dessinez deux points I et J et choisissez deux angles α et β (p.ex. $\alpha = 50°$ et $\beta = 95°$).
- Construisez les points P, $P' = r_{I,\alpha°}(P)$ et $P'' = r_{J,\beta°}(P') = r_{J,\beta°} \circ r_{I,\alpha°}(P)$.
- Construisez de même R, $R' = r_{I,\alpha°}(R)$ et $R'' = r_{J,\beta°}(R') = r_{J,\beta°} \circ r_{I,\alpha°}(R)$.
- Construisez les médiatrices des segments $[PP'']$ et $[RR'']$ et leur point d'intersection A.
- Déplacez les points P et R : que constatez-vous ? Observez les positions de P, P'', R et R'' par rapport à A ! Vérifiez vos hypothèses !
- Enoncez la propriété que vous venez de découvrir :

Soient I et J deux points et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors :
$r_{J,\beta°} \circ r_{I,\alpha°}(P) =$ …………………………………………………………………
………………………………………………………………………………..
………………………………………………………………………………..
………………………………………………………………………………..

- Construisez le centre B de $r_{I,\alpha°} \circ r_{J,\beta°}$ puis étudiez les propriétés du quadrilatère (IAJB).