

Cahier d'exercices d'arithmétique (collège)

5 - Nombres premiers entre eux

Françoise Bastiat, Michel Bénassy, Pierre Roques
Equipe académique Mathématiques
Bordeaux, 11 juin 2001

3^{eme}

I. Application directe de la définition

- 1) Les nombres entiers suivants sont-ils ou non premiers entre eux :
4 et 15 ; 396 et 1144 ; 45 et 94 ; 49 et 721 ; 26 et 143 ; 249 et 508 ; 123 et 45^2 ; 452 et 2037 ?
Recenser les principes mis en œuvre pour reconnaître si deux nombres entiers sont ou non premiers entre eux.
- 2) Citer deux nombres entiers compris entre 20 et 50 premiers entre eux.
Citer deux nombres entiers plus grands que 1000 non premiers entre eux.
- 3) Peut-on trouver deux nombres pairs premiers entre eux ?
Peut-on trouver deux nombres impairs premiers entre eux ?
Peut-on trouver deux nombres impairs non premiers entre eux ?
- 4) Établir la liste des nombres entiers inférieurs à n et premiers avec n pour : $n = 11$; $n = 15$; $n = 28$.

3^{eme}

II. Caractérisation du PGCD de deux entiers naturels

- 1) Par quel nombre entier doit-on diviser 264 et 110 pour obtenir deux quotients entiers premiers entre eux ?
- 2) Trouver deux nombres entiers, l'un plus petit que 1000, l'autre plus grand que 10000, ayant pour PGCD : 258.
- 3) Le PGCD de deux nombres entiers est 24.
Le plus grand des deux est 144.
Le plus petit des deux n'est pas 24. Quel est-il donc ?
- 4) Déterminer tous les couples de nombres entiers naturels (a, b) , où $a \leq b$, qui admettent :
 - pour somme : 168,
 - et pour PGCD : 12.
- 5) Déterminer tous les couples de nombres entiers naturels (m, n) , où $m \leq n$, qui admettent :
 - pour produit : 2160,
 - et pour PGCD : 6.

3^{eme}

III. Un peu plus théorique ...

- 1) Calculer le PGCD de 45 et 46, puis le PGCD de 200 et 201.
Démontrer que deux entiers naturels consécutifs sont premiers entre eux.
- 2) Démontrer que pour tout entier naturel n :
 - n et $2n+1$ sont premiers entre eux ;
 - $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.En utilisant ces résultats, proposer des couples d'entiers naturels premiers entre eux.
- 3) Démontrer que si les entiers naturels m et n sont premiers entre eux, alors m et $m+n$ sont premiers entre eux.
En utilisant ce résultat, proposer des couples d'entiers naturels premiers entre eux.

- 4) Dans son « Liber abaci », Léonard de Pise (dit Fibonacci ; 1180-1250) étudie une suite de nombres entiers qui porte désormais son nom.

La suite de Fibonacci est définie de la façon suivante :

- elle a pour premier terme : $a_1 = 1$,
- elle a pour deuxième terme : $a_2 = 1$,
- puis chaque terme est obtenu comme somme des deux termes précédents (ex : $a_3 = 2$).

Compléter le tableau suivant jusqu'au dixième terme de la suite :

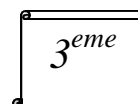
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	...
1	1									

Démontrer que, jusqu'au dixième terme de la suite, deux termes consécutifs sont premiers entre eux.

Le résultat est-il vrai au-delà du dixième terme ?

- 5) Démontrer que si deux entiers naturels sont premiers entre eux, alors tout diviseur de l'un est premier avec l'autre.
- 6) Démontrer que si les carrés de deux entiers naturels sont premiers entre eux, alors ces entiers sont premiers entre eux.

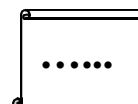
IV. Introduction à un théorème (*) de divisibilité



- 1) Tout multiple de 60 est multiple de 6 et de 10.
La réciproque de cette propriété est-elle vraie ?
- 2) Tout multiple de 12 est multiple de 3 et de 4.
On se propose d'examiner la réciproque de cette propriété.
- Établir la liste des multiples de 3 inférieurs à 50, puis la liste des multiples de 4 inférieurs à 50, enfin, la liste des multiples communs à 3 et 4 inférieurs à 50.
Peut-on trouver un nombre entier inférieur à 50, divisible par 3 et par 4, qui ne soit pas divisible par 12 ?
 - Soit n un entier naturel non nul, divisible par 3 et par 4 :
 $n = 3 \times k$ et $n = 4 \times k'$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, $k' \in \mathbb{N}^*$ et $k > k'$.
Démontrer que n est divisible par 12.
Indication : observer que $n = (4 - 3) \times n$ d'où ...

(*) **Théorème :**

Si un entier naturel non nul est divisible par deux entiers naturels premiers entre eux, alors il est divisible par leur produit.



V. En « remontant » les algorithmes

Cette activité suppose l'étude préalable de l'exercice IV du Chapitre : « Diviseurs communs à deux entiers. PGCD ».

Démontrer que les nombres 55 et 23 sont premiers entre eux.

Exprimer le nombre 1 sous la forme : $1 = l \times 55 + m \times 23$, où l et m sont deux entiers relatifs ;

- en « remontant » l'algorithme des différences ;
- en « remontant » l'algorithme d'Euclide.