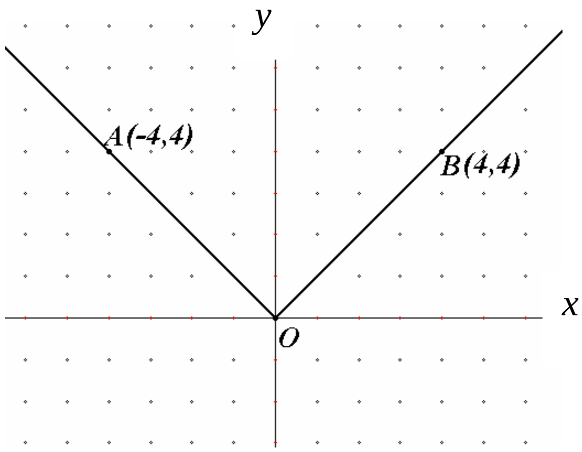
Chemin de fer

Fiche élève

Deux lignes de chemin de fer qui se croisent en *O*, doivent être réliées entre elles par un arc de courbe allant de *A* vers *B*.



a) Détermine une fonction polynôme de degré minimal réalisant cette connexion de telle sorte que les passages en *A* et en *B* se fassent « sans heurts ».

b) Une entreprise spécialisée dans la construction des chemins de fer soumet cinq propositions. Elles sont décrites par les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{1}{8}x^2 + 2; \qquad f_2(x) = 8 - \sqrt{32 - x^2};$$

$$f_3(x) = -\frac{1}{512}x^4 + \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{2}; \qquad f_4(x) = -\frac{8}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right) + 4;$$

$$f_5(x) = -\frac{512}{x^2 + 48} + 12.$$

Examine les différentes solutions, surtout quant à leur « comportement » en *A* et en *B*. Lesquelles proposerais-tu à la direction des chemins de fer ? Justifie ton choix !

c) En dehors du « bon comportement » en *A* et en *B*, la solution finalement retenue devra encore satisfaire les deux conditions supplémentaires que voici :

1) La longueur de l’arc de courbe allant de *A* vers *B* doit être aussi petite que possible.

2) La courbure maximale de l'arc de courbe $\overset{\frown}{AB}$ doit être aussi faible que possible afin que les trains circulant entre *A* et *B* ne soient pas obligés de trop réduire leur vitesse.

Quelle solution sera retenue ?

Remarques :

1) Si *f* est une fonction dérivable sur un intervalle $[a,b]$, alors la longueur de la partie du graphe de *f* allant de $A(a, f(a))$ vers $B(b, f(b))$ est donnée par la formule

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx}.$$

2) Si *f* est une fonction 2 fois dérivable sur un intervalle ouvert *I*, la courbure du graphe de *f* en un point $M(x, f(x))$, $x \in I$, est donnée par la formule

$$\boxed{k(x) = \frac{f''(x)}{\left(1+[f'(x)]^2\right)^{3/2}}}.$$

D'après : Joseph Rolls, Gleisübergang ; in : Abituraufgaben mit Graphikrechnern und Taschencomputern, Teil 2, Schroedel Verlag und Texas Instruments.