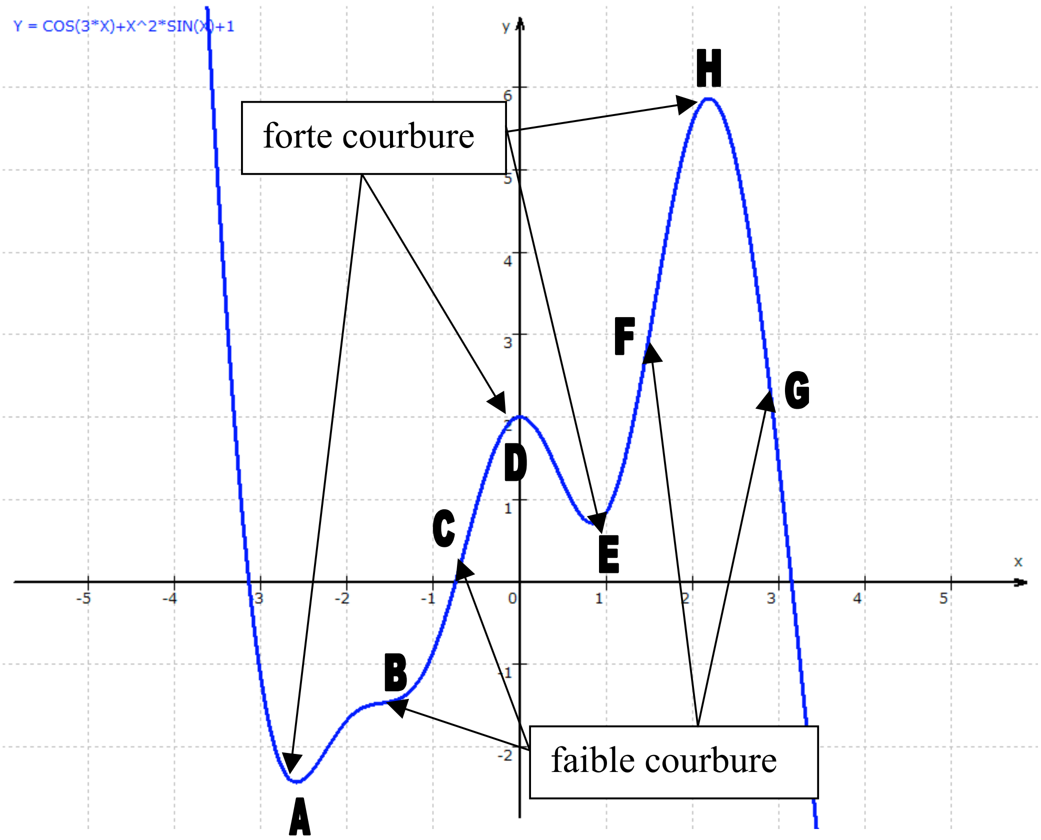
Courbure d’une courbe

Fiche du professeur

<u>Niveau</u> : **2e B**
<u>Sujets et objectifs :</u>
- Courbure au point d’abscisse *a* du graphe d’une fonction deux fois dérivable en *a*
- Illustration de la notion de courbure à l’aide de CABRI géomètre (cf. documents CABRI-géomètre II Plus ***Rayon de courbure 1***; ***Rayon de courbure 2***)

<u>Connaissances préliminaires</u>
- Limite, dérivées première et seconde d’une fonction en un point
- Equation de la tangente et de la normale en un point d’une courbe
- Concavité d’une courbe

1. Notion de courbure.



Imaginons une route dont le tracé aurait la forme de la courbe ci-dessus. L’automobiliste roulant sur cette route doit fortement braquer (manœuvrer le volant) aux points A, D, E et H, alors qu’il n’aura presque pas besoin de braquer aux points B, C, F et G. On dit que la courbe possède une forte « courbure » en A, D, E et H et une faible « courbure » en B, C, F et G.

Le but de ce document est d'établir une expression donnant une mesure de la courbure du graphe d'une fonction en chacun de ses points.

2. Courbure d'une droite, courbure d'un cercle.

2.1 Courbure d'une droite

En roulant sur une route dont le tracé a la forme d'une droite, on maintient le volant tout droit. Une droite « n'est pas courbe ».

Définition

La courbure d'une droite d est 0 en tous ses points.

2.2 Courbure d'un cercle

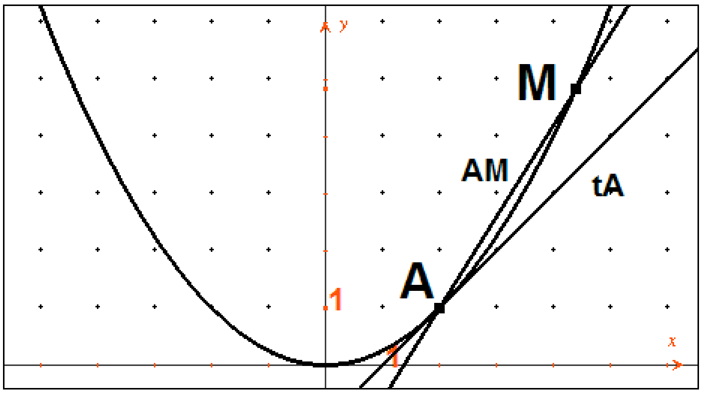
En roulant sur une route dont le tracé a la forme d'un cercle il faut garder le volant dans la même position.
La courbure d'un cercle est la même en tous ses points.
Plus le rayon d'un cercle est petit, plus grande est la courbure.

Définition

La courbure d'un cercle c est l'inverse de son rayon r .

3. Courbure d'une courbe représentative C_f en un de ses points.

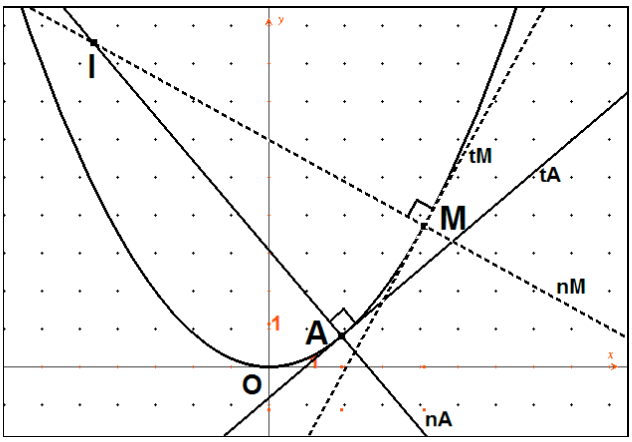
Rappelons que si C_f est le graphe d'une fonction f dérivable en a, on définit « la pente de C_f en $A(a; f(a))$ » comme étant la pente de la tangente à C_f en A. Cette tangente t_A est la droite « qui approche le mieux » C_f au voisinage de A et est définie comme position limite de la sécante AM quand M tend vers A.

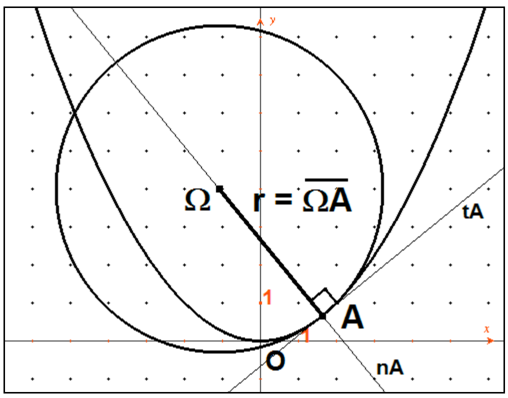


On procède d'une façon analogue pour définir la courbure de C_f en A.

On définit la courbure de C_f en A comme étant la courbure du cercle qui « approche le mieux » C_f au voisinage de A.
Ce cercle, noté c_A et appelé cercle osculateur de C_f en A, est défini comme suit :

> Soient n_A et n_M les normales à C_f en A et en M et I leur point d'intersection.
> (M est un point de C_f, en principe voisin de A).
> Le centre Ω de c_A est la position limite de I lorsque M tend vers A.
> Le rayon r de c_A est la distance $\overline{\Omega A}$.





Exercice 1

Soient f la fonction définie sur IR par $f(x)=x^2$,

$A(1;1)$ et $M\left(1+h;(1+h)^2\right)$, *où* $0<|h|<1$, deux points de C_f.

a) Etablir les équations explicites des normales n_A et n_M à C_f en A et en M.

b) Calculer les coordonnées du point d'intersection I des droites n_A et n_M.

c) En déduire les coordonnées du centre Ω, ainsi que le rayon du cercle osculateur de C_f en *A*. Quelle est la courbure de C_f en *A* ?

d) Montrer que la courbure de C_f au point $A(1;f(1))$ vaut $\dfrac{f''(1)}{\left(\sqrt{1+\left(f'(1)\right)^2}\right)^3}$.

e) Reprendre les paragraphes a), b) et c) pour un point quelconque $A(a;f(a))$.

Montrer que la courbure de C_f au point $A(a;f(a))$ vaut

$$k(a)=\frac{f''(a)}{\left(\sqrt{1+\left(f'(a)\right)^2}\right)^3}.$$

f) En déduire que la courbure de C_f est maximale à l'origine et calculer cette courbure maximale.

g) Pour quelles valeurs de *a* la courbure est elle inférieure à $\dfrac{1}{4}$?

Donner des valeurs exactes et des valeurs approchées à 0,01 près.

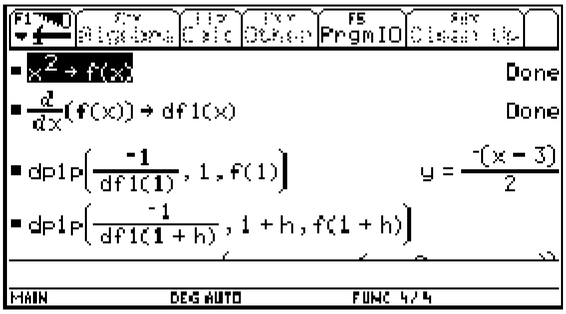
Réponse (exercice 1)

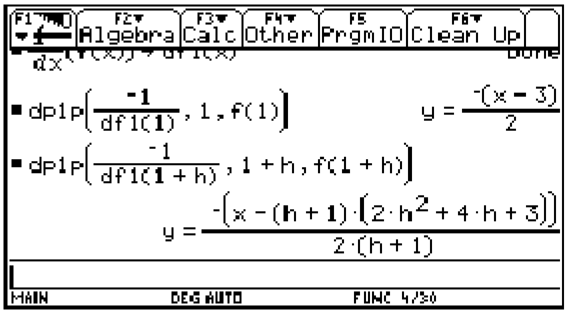
a) Equation réduite de la normale n_A à C_f au point $A(1;1)$:

$$y=\frac{-1}{f'(1)}(x-1)+f(1)=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

Equation réduite de la normale n_M à C_f au point $M\left(1+h;(1+h)^2\right)$:

$$y=\frac{-1}{f'(1+h)}\left(x-(1+h)\right)+f(1+h)=\frac{-1}{2(h+1)}x+h^2+2h+\frac{3}{2}$$





On rappelle :

Le module *dp1p* donne l'équation réduite d'une droite dont on connaît la pente *m* et les coordonnées $(x_A\,;y_A)$ d'un point *A*.

$y=m(x-x_A)+y_A \rightarrow dp1p(m,x_A,y_A)$ (cf. document classe de III : « *Fiche d'utilisation n°3 : Equation cartésienne d'une droite* ».)

b) Coordonnées de I, point d'intersection des droites n_A et n_M :

$$I(x;y)\in n_A\cap n_M$$

$$\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\wedge y=\frac{-1}{2(h+1)}x+h^2+2h+\frac{3}{2}$$

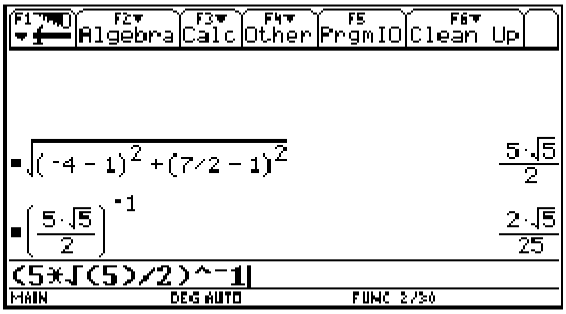
$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{V200} x=-2\left(h^2+3h+2\right)\wedge y=\frac{2h^2+6h+7}{2}$$

c) $x_\Omega=\lim\limits_{h\to 0}-2\left(h^2+3h+2\right)=-4\wedge y_\Omega=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h^2+6h+7}{2}=\dfrac{7}{2}$

le rayon du cercle osculateur r vaut :

$$r=\left\|\overrightarrow{\Omega A}\right\|=\sqrt{\left(1-(-4)\right)^2+\left(1-\frac{7}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{2}\approx 5{,}6$$

la courbure *k* au point $A(1;1)$ vaut : $k=\dfrac{1}{r}=\dfrac{2\sqrt{5}}{25}\approx 0{,}18$



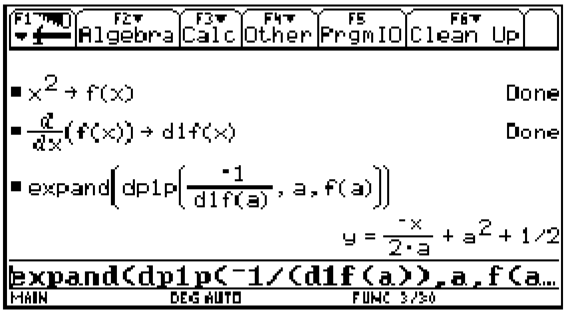
d) $$\frac{f''(1)}{\left(\sqrt{1+\left(f'(1)\right)^2}\right)^3}=\frac{2}{\left(\sqrt{1+\left(2\cdot 1\right)^2}\right)^3}=\frac{2\sqrt{5}}{25}$$

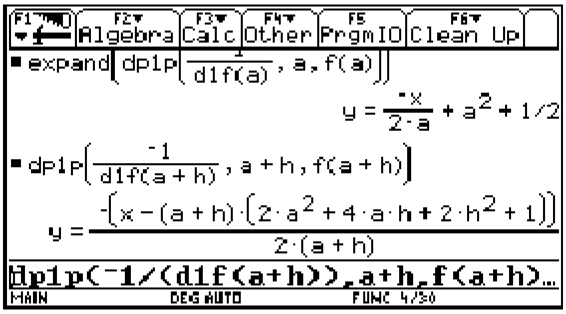
e) Equation réduite de la normale n_A à C_f au point $\boxed{A\left(a;a^2\right)\ avec\ a\neq 0}$:

$$y=\frac{-1}{f'(a)}(x-1)+f(a)=\frac{-1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}$$

Equation réduite de la normale n_M à C_f au point $M\left(a+h;(a+h)^2\right)$:

$$y=\frac{-1}{f'(a+h)}\left(x-(a+h)\right)+f(a+h)=-\frac{1}{2(a+h)}x+\frac{2a^2+4ah+2h^2+1}{2}$$





Coordonnées de I, point d'intersection des droites n_A et n_M :

$I(x;y)\in n_A\cap n_M$

$$\Leftrightarrow y=\frac{-1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}\wedge y=-\frac{1}{2(a+h)}x+\frac{2a^2+4ah+2h^2+1}{2}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{V200} x=-2a\left(2a^2+3ah+h^2\right)\wedge y=\frac{6a^2+6ah+2h^2+1}{2}$$

Par conséquent :

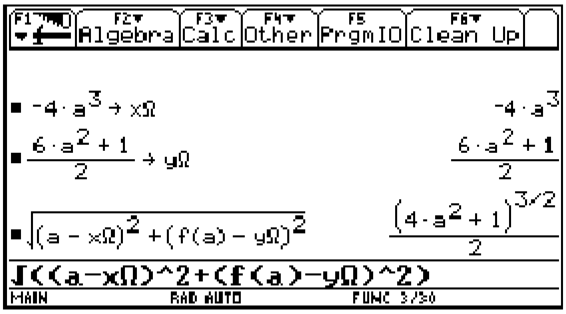
$$x_\Omega=\lim_{h\to 0}-2a\left(2a^2+3ah+h^2\right)=-4a^3\wedge y_\Omega=\lim_{h\to 0}\frac{6a^2+6ah+2h^2+1}{2}=\frac{6a^2+1}{2}$$

Si $a \neq 0$ le rayon r du cercle osculateur au point $A\left(a;a^2\right)$ vaut :

$$r = \overline{\Omega A} = \left\|\overrightarrow{\Omega A}\right\| = \sqrt{\left(a - x_\Omega\right)^2 + \left(f\left(a\right) - y_\Omega\right)^2} = \frac{\left(\sqrt{1+4a^2}\right)^3}{2}$$

Si $a \neq 0$ la courbure k au point $A\left(a;a^2\right)$ vaut :

$$\boxed{k = \frac{1}{r} = \frac{2}{\left(\sqrt{1+4a^2}\right)^3} = \frac{f''(a)}{\left(\sqrt{1+\left(f'(a)\right)^2}\right)^3} \qquad (*)}$$



<u>Cas particulier</u> : $\boxed{a = 0}$

La normale à la parabole à l'origine a pour équation : $x = 0$

Equation explicite de n_M : $y = \dfrac{-1}{f'(h)}\left(x-h\right) + f\left(h\right) \underset{V200}{\underbrace{=}} \dfrac{-1}{2h}x + \dfrac{2h^2+1}{2}$

Coordonnées de I : $x = 0 \wedge y = \dfrac{-1}{2h}x + \dfrac{2h^2+1}{2} \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = \dfrac{2h^2+1}{2}$

Coordonnées de Ω : $x_\Omega = 0 \wedge y_\Omega = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h^2+1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Si $a = 0$ le rayon du cercle osculateur vaut $r = \dfrac{1}{2}$ et la courbure vaut 2.

$$\frac{f''(0)}{\left(\sqrt{1+\left(f'(0)\right)^2}\right)^3} = \frac{2}{\left(\sqrt{1+\left(2\cdot 0\right)^2}\right)^3} = 2$$

La formule (*) reste valable pour calculer la courbure si $a = 0$.

f) Le maximum de $\dfrac{2}{\left(\sqrt{1+4a^2}\right)^3}$ est atteint lorsque $a = 0$ et il vaut 2.

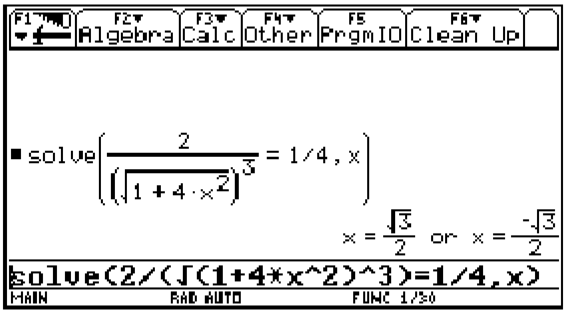
Au sommet de la parabole la courbure est maximale.

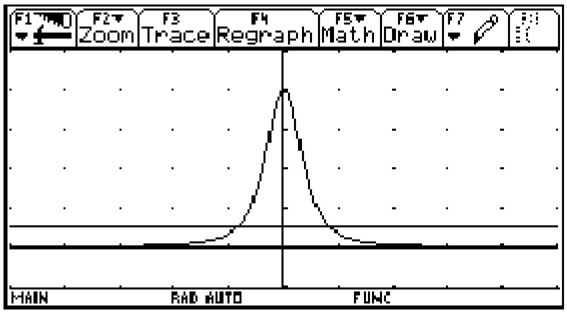
g) $\dfrac{2}{\left(\sqrt{1+4a^2}\right)^3} < \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow a < -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \vee a > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

La courbure est inférieure à $\dfrac{1}{4}$ ssi $a < -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \vee a > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Représentation graphique des fonctions $x \mapsto \dfrac{2}{\left(\sqrt{1+4x^2}\right)^3}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{4}$

(xmin = -5 ; xmax = 5 ; xscl = 1 ; ymin = - 0,5 ; ymax = 2,5 ; yscl = 0,5)





Définition

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I.

On appelle courbure (algébrique) du graphe C_f au point $A(x, f(x)) \in C_f$, $x \in I$, le nombre

$$k(x) = \frac{f''(x)}{\left(\sqrt{1+f'(x)^2}\right)^3}.$$

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(x^3 - 6x^2\right)$.

a) Calculer la courbure du graphe C_f au point d'abscisse x.

b) Pour quelles valeurs de x la courbure est-elle strictement positive ? strictement négative ? nulle ?

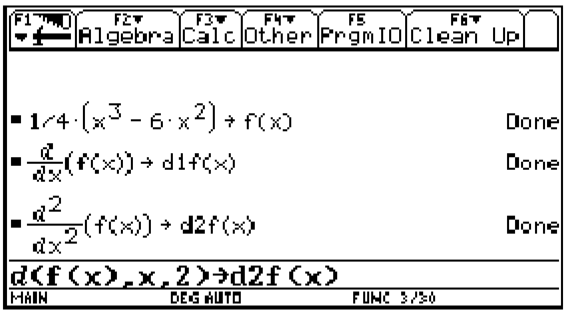
c) Interpréter géométriquement le signe de la courbure.

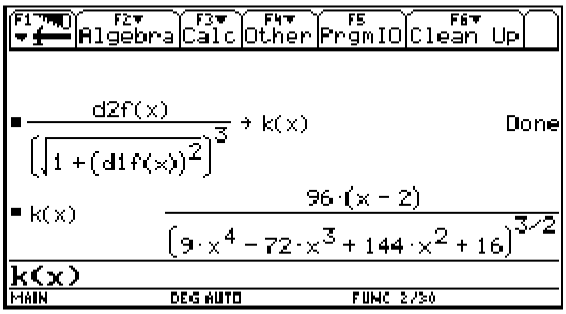
Réponse (exercice 2)

a) $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(x^3 - 6x^2\right)$

Courbure du graphe de f au point d'abscisse x:

$$k(x) = \frac{f''(x)}{\left(\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\right)^3} = \frac{96(x-2)}{\left(\sqrt{9x^4 - 72x^3 + 144x^2 + 16}\right)^3}$$



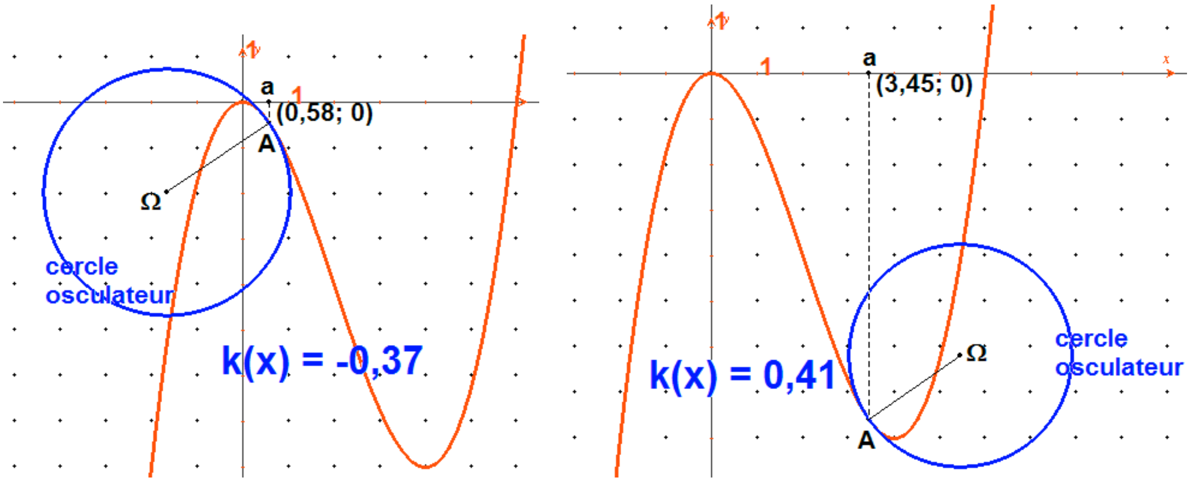


b) <u>Signe de la courbure en fonction de *x* :</u>

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$k(x)$		$-$	0	$+$	

c) <u>Interprétation géométrique du signe de la courbure</u>

(Voir document CABRI-géomètre II Plus *Rayon de courbure2.fig*)



Si $x < 2$ la courbure est négative. Quand on roule avec une voiture sur une route qui suit le tracé de la courbe d'équation $y = \frac{1}{4}\left(x^3 - 6x^2\right)$, il faut braquer dans le sens mathématique négatif aux points où l'abscisse est strictement inférieure à 2.
$k(x) < 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0 \Leftrightarrow C_f$ tourne sa concavité vers le bas au point d'abscisse x. (en allemand : *Rechtskrümmung*)

Si $x > 2$ la courbure est positive. Quand on roule avec une voiture sur une route qui suit le tracé de la courbe d'équation $y = \frac{1}{4}\left(x^3 - 6x^2\right)$, il faut braquer dans le sens mathématique positif aux points où l'abscisse est strictement supérieure à 2.
$k(x) > 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0 \Leftrightarrow C_f$ tourne sa concavité vers le haut au point d'abscisse x. (en allemand : *Linkskrümmung*)

Exercice 3 (facultatif – donné à titre de curiosité !)

Cas général

Soit f une fonction deux fois dérivable définie sur un intervalle ouvert de centre x_0 telle que $f''(x_0) \neq 0$. Montrez que le rayon de courbure de C_f au point $\mathrm{A}(x_0 ; f(x_0))$ vaut

$r = \left| \dfrac{\left(\sqrt{1+(f'(x_0))^2}\right)^3}{f''(x_0)} \right|$ et la courbure $k = \left| \dfrac{f''(x_0)}{\left(\sqrt{1+(f'(x_0))^2}\right)^3} \right|$.

La courbure algébrique de C_f au point $\mathrm{A}(x_0 ; f(x_0))$ est donnée par la formule :

$$k(x_0) = \frac{f''(x_0)}{\left(\sqrt{1+(f'(x_0))^2}\right)^3}.$$

Remarque :

D'après les formules ci-dessus, on remarque que la courbure est définie en chaque point de C_f où f est deux fois dérivable, tandis que le rayon de courbure n'existe pas si $f''(x_0) = 0$.

Réponse:

Soit $\mathrm{A}\left(x_0\,;f\left(x_0\right)\right)$ et $\mathrm{M}\left(x_0+h;f\left(x_0+h\right)\right)$ deux points de C_f.

Equation réduite de la normale n_A à C_f au point $\mathrm{A}\left(x_0\,;f\left(x_0\right)\right)$:

$$y=\frac{-1}{f'\left(x_0\right)}\left(x-x_0\right)+f\left(x_0\right)$$

Equation réduite de la normale n_M à C_f au point $\mathrm{M}\left(x_0+h;f\left(x_0+h\right)\right)$:

$$y=\frac{-1}{f'\left(x_0+h\right)}\left(x-\left(x_0+h\right)\right)+f\left(x_0+h\right)$$

Coordonnées de $I\left(x;y\right)=n_A\cap n_M$ en fonction de $h\neq 0$:

Pour les calculs avec la V200, posez

$$f'\left(x_0\right)=f1\left(x_0\right) \text{ et } f'\left(x_0+h\right)=f1\left(x_0+h\right)$$

et n'oubliez pas d'effacer les variables f, $f1$, x, y, x_0 et h !

$$I\left(x;y\right)\in n_A\cap n_M$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{-1}{f'\left(x_0\right)}\left(x-x_0\right)+f\left(x_0\right)\wedge y=\frac{-1}{f'\left(x_0+h\right)}\left(x-\left(x_0+h\right)\right)+f\left(x_0+h\right)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{f'\left(x_0\right)\cdot\left[f'\left(x_0+h\right)\cdot\left(f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)\right)+x_0+h\right]-x_0\cdot f'\left(x_0+h\right)}{f'\left(x_0\right)-f'\left(x_0+h\right)}$$

$$\wedge y=\frac{f\left(x_0\right)\cdot f'\left(x_0\right)-f\left(x_0+h\right)f'\left(x_0+h\right)-h}{f'\left(x_0\right)-f'\left(x_0+h\right)}$$

Par conséquent :

$$\left\|\overrightarrow{I\mathrm{A}}\right\|^2=\left(\frac{f'\left(x_0\right)\cdot\left[f'\left(x_0+h\right)\cdot\left(f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)\right)+x_0+h\right]-x_0\cdot f'\left(x_0+h\right)}{f'\left(x_0\right)-f'\left(x_0+h\right)}-x_0\right)^2$$

$$+\left(\frac{f\left(x_0\right)\cdot f'\left(x_0\right)-f\left(x_0+h\right)f'\left(x_0+h\right)-h}{f'\left(x_0\right)-f'\left(x_0+h\right)}-f\left(x_0\right)\right)^2$$

$$=\frac{\left(\left(f'(x_0)\right)^2+1\right)\cdot\left[f'(x_0+h)\cdot\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right)+h\right]^2\cdot\frac{1}{h^2}}{\left[f'(x_0)-f'(x_0+h)\right]^2\cdot\frac{1}{h^2}}$$

$$=\frac{\left(\left(f'(x_0)\right)^2+1\right)\cdot\left[f'(x_0+h)\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+1\right]^2}{\left[\frac{f'(x_0)-f'(x_0+h)}{h}\right]^2}$$

On en déduit :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\left(f'(x_0)\right)^2+1\right)\cdot\left[f'(x_0+h)\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+1\right]^2}{\left[\frac{f'(x_0)-f'(x_0+h)}{h}\right]^2}$$

$$=\frac{\left(\left(f'(x_0)\right)^2+1\right)\cdot\left[f'(x_0)\cdot f'(x_0)+1\right]^2}{\left(f''(x_0)\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\left(f'(x_0)\right)^2+1\right)^3}{\left(f''(x_0)\right)^2}$$

Finalement :

$$r^2=\left\|\overrightarrow{\Omega A}\right\|^2=\frac{\left(\left(f'(x_0)\right)^2+1\right)^3}{\left(f''(x_0)\right)^2}\Rightarrow r=\left|\frac{\left(\sqrt{\left(f'(x_0)\right)^2+1}\right)^3}{f''(x_0)}\right|$$

et $k=\frac{1}{r}=\left|\frac{f''(x_0)}{\left(\sqrt{\left(f'(x_0)\right)^2+1}\right)^3}\right|$