Eléments de symétrie d'un polynôme

Fiche du professeur

Niveau : Ire B

Sujets et objectifs : Il est souvent difficile de reconnaître sur l'expression algébrique d'une fonction f si $\mathcal{G}_f$ admet un élément de symétrie ou non. Le but de ce problème est d'éclaircir la question pour les polynômes de degré ≤ 4.

Connaissances préliminaires : Dérivation et intégration.

Dans tout le problème f désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' sa fonction dérivée. On notera $\mathcal{G}_f$ le graphe de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

(1) Rappeler la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{G}_f$ admette
   a) la droite $x = x_0$ comme axe de symétrie ;
   b) le point (x_0, y_0) comme centre de symétrie.

(2) Supposons que f est paire ou impaire.
   a) Etudier la parité de f' dans les deux cas.
   b) Traduire géométriquement vos observations.
   c) Démontrer que toute primitive d'une fonction impaire est paire.
   d) Est-il vrai que toute primitive d'une fonction paire est impaire ?

(3) On généralise maintenant les résultats de la question précédente.
   a) Démontrer que $\mathcal{G}_f$ admet un centre de symétrie si et seulement si $\mathcal{G}_{f'}$ admet un axe de symétrie.
   b) Démontrer que $\mathcal{G}_f$ admet un axe de symétrie si et seulement si $\mathcal{G}_{f'}$ admet un centre de symétrie situé sur l'axe des abscisses.

(4) Soit $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polynôme du 3e degré. Déduire de la question (3) que $\mathcal{G}_f$ admet un centre de symétrie que l'on déterminera.

(5) Soit $f : x \mapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ un polynôme du 4e degré. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients a, b, c et d pour que $\mathcal{G}_f$ admette un axe de symétrie et préciser cet axe de symétrie.