Construction d'une route et fonction ln

Fiche élève

On considère la famille de fonctions f_k définies par $f_k(x) = x^2 - \ln\left(x^2 + k^2\right)$ avec $k > 0$.

a) Montrez que le graphe de f_k est symétrique par rapport à *Oy*.

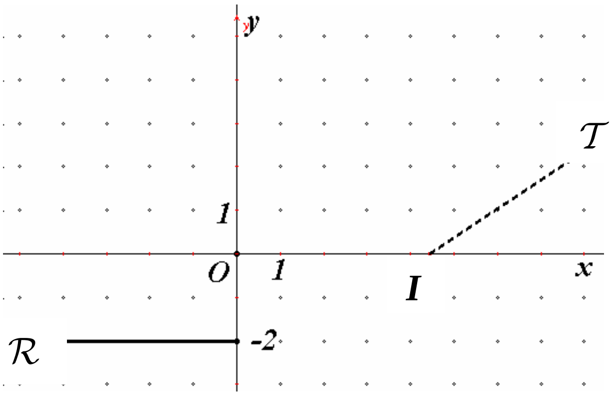
b) Faites une classification des fonctions f_k suivant le nombre et la nature des extréma. Puis, pour chacune des familles de fonctions trouvées précédemment, esquissez le graphe de l'une d'entre elles dans un (même) R.O.N. (unité de longueur = 1 cm).

c) Démontrez que si $k_1 < k_2$ alors le graphe de f_{k_1} est situé au-dessus de celui de f_{k_2}.

d) Déterminez l'équation du lieu $\mathcal{L}$ des minima des f_k pour $k \in \left]0,1\right[$.

e) Une nouvelle route $\mathcal{P}$ doit être construite. Elle devra prolonger tangentiellement une route $\mathcal{R}$ déjà existante.

Échelle 1unité = 100 m



- Déterminez k_0 tel que la fonction f_{k_0} vérifie cette condition. (Pour vérification : on trouve $k_0 = e$.)
- Déterminez le point d'intersection *I* du graphe de f_{k_0} avec *Ox*.

  La route sera prolongée de façon rectiligne à partir de ce point *I* (ligne pointillée).
- Etablissez l'équation de cette partie rectiligne $\mathcal{T}$ ainsi que l'aire $\mathcal{A}$ comprise entre $\mathcal{P}$ et les axes de coordonnées.

- Examinez finalement la section de route $\mathcal{P}$ en ce qui concerne sa courbure aux points de raccordement avec les autres sections.

D'après : Werner Hellberg, Straßenführung mit ln-Funktionen ; in : Abituraufgaben mit Graphikrechnern und Taschencomputern, Teil 2, Schroedel Verlag und Texas Instruments.