Construction d'une route et courbure

(Corrigé modèle)

a) Soit f la fonction dont le graphe correspond à la nouvelle route, c.-à-d.

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x \le 0 \text{ ou } x \ge 4 \\ P_4(x) & \text{si } 0 \le x \le 4 \end{cases}$$

où $P_4 : x \mapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ est le polynôme du 4^e degré cherché. Les conditions nécessaires et suffisantes que doit vérifier P_4 sont :

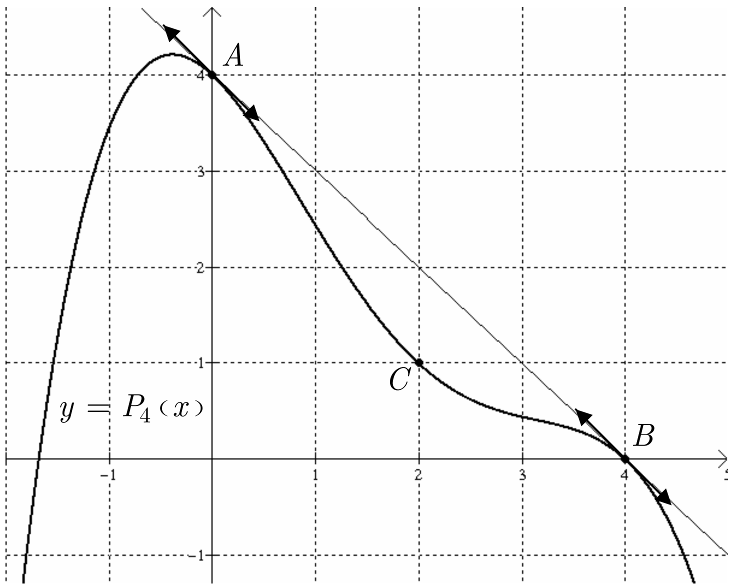
$$\begin{cases} P_4(0) = 4 & \text{car } A \in \mathcal{G}_f \\ P_4(4) = 0 & \text{car } B \in \mathcal{G}_f \\ P_4(2) = 1 & \text{car } C \in \mathcal{G}_f \\ P_4'(0) = -1 = f_g'(0) & \text{car la nouvelle route doit déboucher en } A \text{ et en } B \\ P_4'(4) = -1 = f_d'(4) & \qquad \text{tangentiellement dans l'ancienne route} \end{cases}$$

On résout ce système d'équations à l'aide de la V200 et on trouve :

$$a = -\frac{1}{16},\ b = \frac{1}{2},\ c = -1,\ d = -1 \text{ et } e = 4.$$

Donc :

$$P_4(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x^2 - x + 4.$$



b) Rappelons que l'expression de la courbure en un point $(x, f(x))$ du graphe de f est donnée par :

$$k(x) = \frac{f''(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}^3}.$$

Les raccords en A et en B se font « sans heurts » ssi la courbure du graphe en ces points est continue, c.-à-d. ssi f' et f'' sont continues aux points d'abscisses 0 et 4 respectivement. On sait déjà que $f'(0) = f'(4) = -1$ (condition imposée lors de la définition de P_4). Il reste donc à voir si f'' est continue en 0 et en 4. Or :

$f_g''(0) = 0$ (courbure d'une droite) et $f_d''(0) = P_4''(0) = -2$ (V200)

Donc il y a un heurt en A. De même :

$f_d''(4) = 0$ (courbure d'une droite) et $f_g''(4) = P_4''(4) = -2$ (V200)

Il y a donc également un heurt en B.

c) Afin que les raccords en A et en B se fassent sans heurts, il faut imposer deux conditions supplémentaires sur le polynôme P, à savoir que la courbure en 0 et en 4 soit nulle. En d'autres termes, on obtient le système de 7 équations suivantes :

$$\begin{cases} P(0) = 4 \\ P(4) = 0 \\ P(2) = 1 \\ P'(0) = P'(4) = -1 \\ P''(0) = P''(4) = 0 \end{cases}$$

Le degré minimal de P est donc de 6, c.-à-d. on pose :

$$P(x) = a'x^6 + b'x^5 + c'x^4 + d'x^3 + e'x^2 + f'x + g'.$$

On résout le système précédent à l'aide de la V200 et on trouve :

$$P(x) = \frac{1}{64}x^6 - \frac{3}{16}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - x^3 - x + 4.$$