Courbure d'une courbe (version 2e C&D)

Fiche du professeur

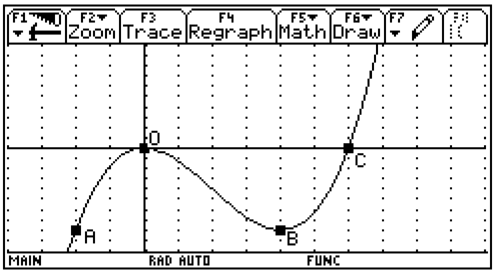
Niveau : **2e C, D**

Sujets et objectifs : Introduction intuitive à la notion de courbure

Connaissances préliminaires : Dérivées première et seconde d'une fonction ; point d'inflexion ; concavité

1) **Définition de la courbure.**

Imaginons une route dont le tracé aurait la forme de la courbe ci-contre.



L'automobiliste roulant sur cette route doit fortement braquer (manœuvrer le volant) aux points O et B, alors qu'il n'aura presque pas besoin de braquer aux points A et C.

On dit que la courbe possède une forte « courbure » en O et B et une faible « courbure » en A et C.

Définition

Soit *f* une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle ouvert *I*.

On appelle courbure du graphe C_f au point $A(x, f(x)) \in C_f$, $x \in I$, le nombre

$$k(x) = \frac{f''(x)}{\left(\sqrt{1+f'(x)^2}\right)^3}.$$

2) Courbure d'une droite

Calcule la courbure de la droite $d \equiv y = ax + b$ en un point quelconque de *d*.

Conclusion ?

3) Exercice

On considère la fonction *f* définie par $f(x) = \frac{1}{4}\left(x^3 - 6x^2\right)$ avec $x \in \mathbb{R}$.

a) Représente graphiquement la fonction *f,* puis calcule la courbure $k(x)$ du graphe C_f aux points d'abscisses $x = -2, -1, 0, 2, 3, 4, 6, 7 \ldots$. (donne des valeurs approchées à 10^{-3} près).

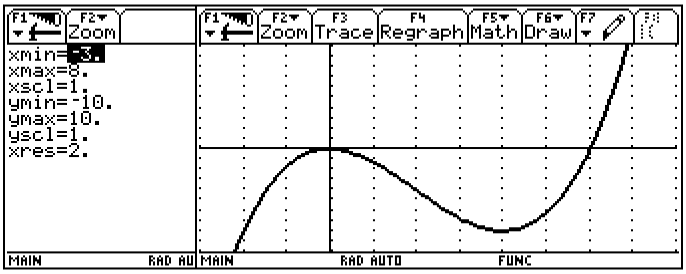
b) A partir des résultats trouvés au paragraphe a), réponds aux questions suivantes :

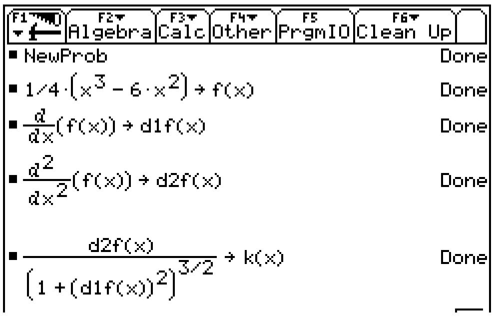
- Quelle est la signification du signe de la courbure ?
  Quelle est la signification de sa valeur absolue ?
  Est-ce que ces résultats coïncident avec les affirmations du §1 ?
- Y a-t-il un point de la courbe où la courbure est nulle ? Si oui, de quel point remarquable s'agit-il ?

c) Représente graphiquement les deux fonctions *f* et *k* (dans un même repère) et vérifie tes réponses du paragraphe b).

Réponse (exercice)

a)

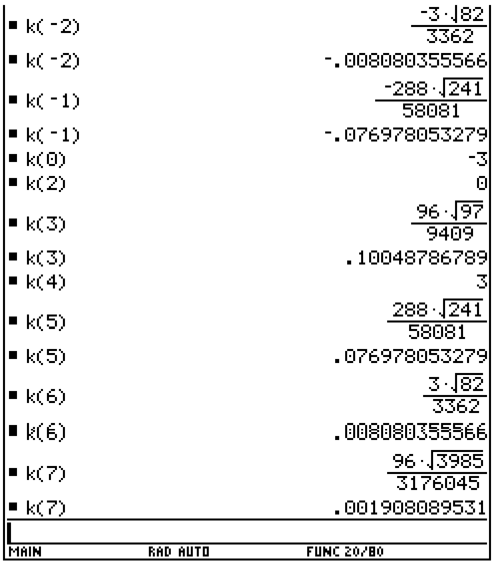




Sauvegarde de l'expression $f(x)$

On note $d1f$ et $d2f$ les dérivées première et seconde de f

Définition de la courbure en un point d'abscisse x



Calcul de $k(x)$ pour $x = -2, -1, 0, 2, 3, 4, 6, 7 ...$

(valeurs exactes et valeurs approchées)

b) La valeur absolue de $k(x)$ est une mesure de la manière dont il faut braquer (cf. l'automobiliste !) : plus $|k(x)|$ est grand, plus il faut braquer fortement.

Le signe de $k(x)$ montre dans quel sens il faut tourner le volant :

Si $k(x) > 0$, il faut tourner le volant dans le sens mathématique positif.

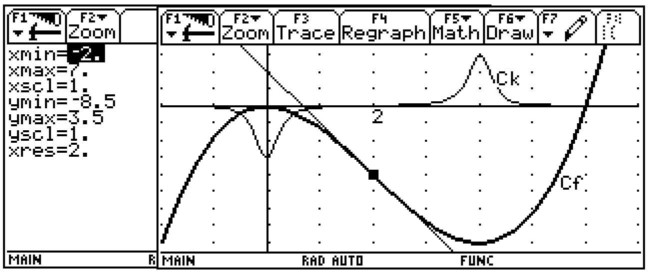
C_f tourne sa concavité vers le haut.

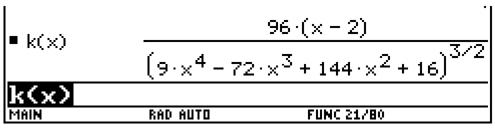
Si $k(x) < 0$, il faut tourner le volant dans le sens mathématique négatif.

C_f tourne sa concavité vers le bas.

$k(2) = 0$; le point d'abscisse 2 est un point d'inflexion de C_f.

c)





*(**N.B**. Contrairement à ce qu'on pourrait croire, la valeur absolue de $k(x)$ n'est maximale ni pour $x = 0$ ni pour $x = 4$; elle est maximale pour deux valeurs voisines de 0 et de 4.)*