Approximation polynomiale d'une fonction

Introduction

On a vu qu'on peut approcher localement (c.-à-d. au voisinage d'un réel x_0) une fonction dérivable f par une fonction ***affine***. Plus précisément, si f est dérivable au voisinage de x_0, la fonction ***affine tangente***

$$t : x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

est la ***meilleure approximation affine*** de *f*. Cette approximation est la meilleure au sens que t est l'***unique*** fonction affine telle que :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - t(x)}{x - x_0} = 0 \quad (*)$$

(c.-à-d. la différence $f(x) - t(x)$ devient de plus en plus faible ***par rapport à*** $x - x_0$ lorsque $x \to x_0$). (Démontrer $(*)$ et l'unicité !)

Le but de ce problème est de généraliser la notion de meilleure approximation affine, c.-à-d. de chercher des ***polynômes*** de degré > 1 qui approchent au mieux une fonction donnée au voisinage d'un réel x_0. Afin de ne pas trop alourdir les notations, nous allons nous restreindre au cas $x_0 = 0$. Cela n'empêchera pas l'élève intéressé de généraliser les définitions et résultats en un réel x_0 quelconque.

Définition. On dit qu'un polynôme P est une ***approximation polynômiale*** (ou ***un développement limité***) ***à l'ordre*** n $(n \in \mathbb{N})$ d'une fonction f ***au voisinage de 0*** si

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - P(x)}{x^n} = 0 \\ \mathrm{d}°P \leq n \end{cases}$$

A. Exemples

(1) a) En utilisant les rappels de l'introduction, déterminer l'approximation polynômiale P_1 de la fonction sin à l'ordre 1 au voisinage de 0. Représenter graphiquement les fonctions sin et P_1. Déterminer les réels x pour lesquels $|\sin x - P_1(x)| \leq 0{,}1$.

b) Déterminer à l'aide de la V200 l'approximation polynômiale P_i de la fonction sin à l'ordre i au voisinage de 0, en faisant varier i de 2 à 5. Retrouver ces résultats sans V200 en utilisant la règle de l'Hôpital. Représenter graphiquement les fonctions sin, P_3 et P_5. Résoudre à l'aide de la V200 les inéquations $|\sin x - P_3(x)| \leq 0{,}1$ et $|\sin x - P_5(x)| \leq 0{,}1$. Conclusion ?

(2) Reprendre les questions précédentes en remplaçant la fonction sin par l'une des fonctions suivantes :

a) cos ;

b) tan ;

c) Arcsin ;

d) $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$;

e) $g : x \mapsto \dfrac{2x^2 - x - 1}{x+2}$

(3) Etudier les approximations polynômiales aux différents ordres en 0 d'une fonction polynôme, par exemple : $f : x \mapsto 5 - 2x + x^2 - 2x^3 + x^6$.

(4) Etudier les approximations polynômiales aux différents ordres en 0 des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

b) $g : x \mapsto |x|$

c) $h : x \mapsto \left|x^3\right|$

d) $k : x \mapsto \sqrt{x}$

B. Partie théorique

(1) Démontrer que si une approximation polynômiale à l'ordre n d'une fonction f au voisinage de 0 existe, alors elle est ***unique***.

(2) Démontrer que si P est l'approximation polynômiale de f à l'ordre n et si Q est l'approximation polynômiale de f à l'ordre m, avec $m < n$, alors Q s'obtient en supprimant dans P les coefficients de degré $> m$.

(3) Soit f une fonction ***continue*** au voisinage de 0. Quelle est l'approximation polynômiale de f à l'ordre 0 ?

(4) Soit f une fonction ***dérivable*** au voisinage de 0. Quelle est l'approximation polynômiale de f à l'ordre 1 ?

(5) Soit f une fonction ***deux fois dérivable*** au voisinage de 0. Quelle est l'approximation polynômiale de f à l'ordre 2 ?

(6) Montrer par récurrence que toute fonction f qui est n fois dérivable au voisinage de 0 admet l'approximation polynômiale suivante à l'ordre n en 0 :

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

T_n est appelé ***polynôme de Taylor*** à l'ordre n en 0 de la fonction f.

(7) Retrouver les résultats de la partie A avec commande « taylor » de la V200