Méthode d'Euler et fonction exponentielle

Une ***équation différentielle*** est une relation entre une fonction ***inconnue*** et une ou plusieurs de ses dérivées. Nous nous intéressons ici à l'équation différentielle la plus simple $y' = y$, où y est la fonction inconnue, avec la condition initiale $y(0) = 1$. En d'autres termes, on cherche une fonction f vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ (\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x) = f(x) \end{cases}$$

(1) On note $y_0 = f(0) = 1$. En utilisant le fait que la fonction affine tangente est la ***meilleure approximation affine*** de f au voisinage d'un réel a, donnez

- une valeur approchée y_1 de $f(0{,}5)$,
- puis une valeur approchée y_2 de $f(1)$ (en utilisant y_1),
- puis une valeur approchée y_3 de $f(1{,}5)$ (en utilisant y_2),
- etc …
- finalement une valeur approchée y_6 de $f(3)$ (en utilisant y_5).

(2) Donnez de même une valeur approchée y_{-1} de $f(-0{,}5)$, puis une valeur approchée y_{-2} de $f(-1)$, puis une valeur approchée y_{-3} de $f(-1{,}5)$, …, finalement une valeur approchée y_{-6} de $f(-3)$ (en utilisant y_{-5}).

Remarque. Ce procédé itératif permettant d'obtenir une solution approchée d'une équation différentielle est appelé ***méthode d'Euler***.

(3) En posant $x_n = n \cdot 0{,}5$, pour $n \in \mathbb{Z}$, établissez une ***formule explicite*** donnant y_n, valeur approchée de $f(x_n)$. Représentez graphiquement les points (x_n, y_n) dans un repère à l'aide de la V200. (On définira les points à l'aide d'une variable de type ***data/matrix*** et on utilisera le type de graphique « ***scatter*** ») Afin d'obtenir une image pour tout réel, reliez chaque point (x_n, y_n) au point suivant (x_{n+1}, y_{n+1}) par un segment de droite (***méthode d'interpolation linéaire***) : cela se fait avec la V200 en remplaçant le « scatterplot » par un graphique de type « ***xyline*** ».

(4) Afin d'***améliorer l'approximation*** du graphe de la fonction f, refaire les questions précédentes avec un ***pas plus petit***, par exemple $0{,}1$.

(5) Pour un pas h quelconque, donnez x_n et y_n en fonction de n et de h. Montrez que le graphe de la fonction $\tilde{f}_h : x \mapsto (1+h)^{\frac{x}{h}}$ passe par tous les points (x_n, y_n) et est donc une solution approchée de la fonction cherchée f.

(6) Emettez une ***conjecture*** comment obtenir la valeur exacte de $f(1)$ à partir des $\tilde{f}_h(1)$ et plus généralement comment obtenir la valeur exacte de $f(x)$ à partir des $\tilde{f}_h(x)$. Nous admettons que ces conjectures sont vraies ! Le nombre $e = f(1)$ est appelé ***nombre d'Euler***. La fonction f, unique solution de l'équation différentielle $y' = y$ avec condition initiale $y(0) = 1$ est appelée fonction exponentielle et notée encore exp. Concluez que :

$$\exp : x \mapsto e^x$$

Comparez le graphe de la fonction exponentielle et celui des fonctions $\tilde{f}_h$ à l'aide de votre calculatrice.