Sur les normales à une parabole

Rappel : Soit f une fonction dérivable en un réel x_0 et $\mathcal{G}_f$ son graphe dans un repère orthonormé du plan. La ***normale*** à $\mathcal{G}_f$ au point $(x_0, f(x_0))$ est la droite passant par ce point et perpendiculaire à la ***tangente*** à $\mathcal{G}_f$ en ce point. L'équation de cette normale est :

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) & \text{si } f'(x_0) \neq 0 \\ x = x_0 & \text{si } f'(x_0) = 0 \end{cases}$$

On veillera à ne pas oublier le cas particulier où $f'(x_0) = 0$ dans la 2^{e} partie du problème !

1re partie : On considère le polynôme du 3^{e} degré $p_{\alpha,\beta} : x \mapsto x^3 - \alpha x + \beta$, où α et β sont des paramètres réels.

(1) Montrer que si $\alpha \leq 0$ alors $p_{\alpha,\beta}$ est strictement croissant et en déduire le nombre de racines réelles de $p_{\alpha,\beta}$ dans ce cas.

(2) Etablir le tableau des variations de $p_{\alpha,\beta}$ lorsque $\alpha > 0$ (sans l'étude de la concavité).

(3) En déduire le nombre de racines réelles de $p_{\alpha,\beta}$ en fonction de α et β.

2^{e} partie : Soit $\mathcal{P}$ le graphe de la fonction $f : x \mapsto x^2$ dans un repère orthonormé du plan.

(1) Déterminer les équations des normales à $\mathcal{P}$ passant par le point $A\left(-5, \frac{23}{4}\right)$, puis construire ces normales. Faire de même pour les normales à $\mathcal{P}$ passant par $B\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

(2) Montrer que si a et b sont deux réels quelconques, alors le nombre de normales à $\mathcal{P}$ passant par le point (a, b) est égal au nombre de racines réelles du polynôme $p_{b-\frac{1}{2}, -\frac{a}{2}}$ de la 1re partie.

(3) En utilisant la 1re partie du problème, établir une classification du plan suivant le nombre de normales à $\mathcal{P}$ qui passent par un point donné. Faire une figure soignée ! (On sera amené à construire la courbe $\mathcal{N}$ d'équation $y = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(2x)^2} + \frac{1}{2}$, dont on étudiera brièvement l'allure.)

Note historique : La courbe $\mathcal{N}$ a été découvert en 1657 par William Neile et porte le joli nom de parabole semi-cubique.