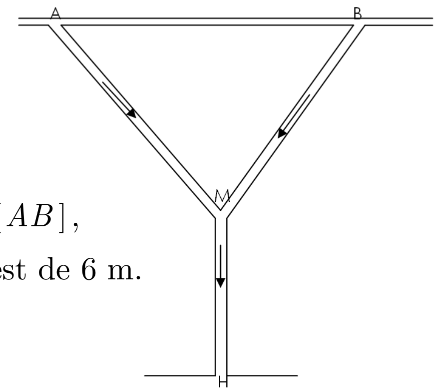
Problèmes à résoudre avec la V200

(1) Deux rues se coupent à angle droit en un point P. L'une a la direction nord-sud, l'autre la direction est-ouest. Une voiture venant de l'ouest passe en P à 10h, à la vitesse constante de 20 km/h. Au même moment, une autre voiture, située à 2 km au nord du croisement, se dirige vers le sud à 50 km/h. A quel moment ces deux voitures sont-elles les plus proches l'une de l'autre ? Quelle est cette distance ?

(2) Le passager d'une barque située à 2 km du point le plus proche de la rive désire atteindre le plus rapidement possible la maison située au bord de l'eau à 6 km en aval. Etant donné que cette personne se déplace à 3 km/h à la rame et à 5 km/h à pied, en quel point de la rive doit-elle accoster pour arriver au plus vite ? Quelle est la durée du voyage ?

(3) On décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur la façade d'une maison. Sur cette façade, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluies pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir. Voici le plan de ce système :



Données :

- $\overline{AB} = 10$ m,
- H appartient à la médiatrice de $[AB]$,
- la distance de H à la droite AB est de 6 m.

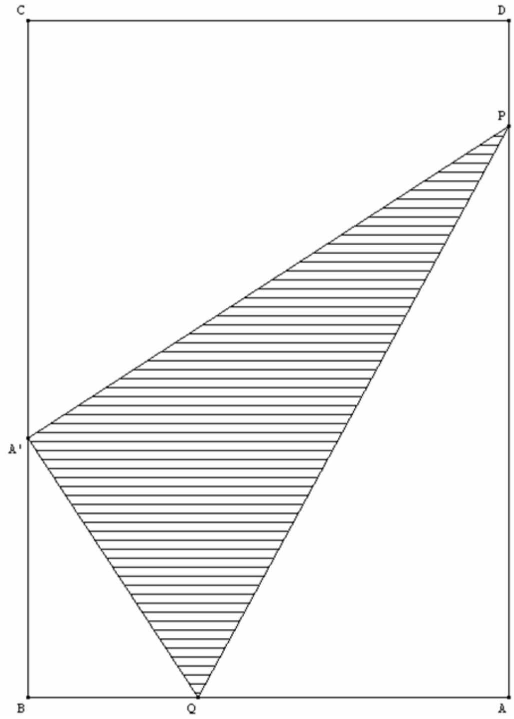
On demande de déterminer, sur la façade de cette maison, la position du point M qui minimise la longueur totale des tuyaux On élaborera ***deux réponses distinctes*** au problème :

- la première en discutant en fonction de $x = \overline{MH}$,
- la deuxième en discutant en fonction de $\theta = \widehat{MAB}$.

(4) ***Problème de Portsmann (1922)***. On dispose d'une feuille de papier de format A4 (210 x 297 mm). On plie cette feuille de façon à amener le coin A sur un point A' de $[BC]$ comme sur la figure ci-contre. (Le pli est donc le segment $[PQ]$, avec $P \in [AD]$, $Q \in [AB]$).

a) Déterminer la position de A' sur le segment $[BC]$ qui minimise la longueur du pli $\overline{PQ}$.

b) Déterminer la position de A' sur le segment $[BC]$ qui qui minimise l'aire du triangle $A'PQ$.



Indication ; poser $x = \overline{AQ}$, $y = \overline{AP}$ et déterminer y en fonction de x !

(5) Soit A et B deux points distincts de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$. Déterminer la position d'un point M de l'arc $\widehat{AB}$ de $\mathcal{P}$ qui maximise l'aire du triangle AMB.

(6) On veut mettre sur le marché une boîte cylindrique sans couvercle d'une capacité de 81π cm^3. Le matériau employé pour le fond coûte 3 cents et celui utilisé pour la surface latérale coûte 1 cent par cm^2. Quelles doivent être le rayon R et la hauteur h de la boîte pour que celle-ci coûte le moins possible? Quel est ce coût minimal ?

Examen d'admission à l'UCL (Belgique)
Analyse – Question 3.b (Septembre 1999)