



## Boîte et feuille DIN A4

Fiche du professeur

Niveau : 3e BCD

Sujets et objectifs :

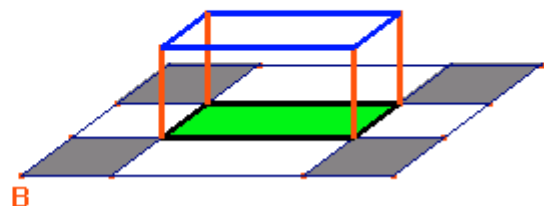
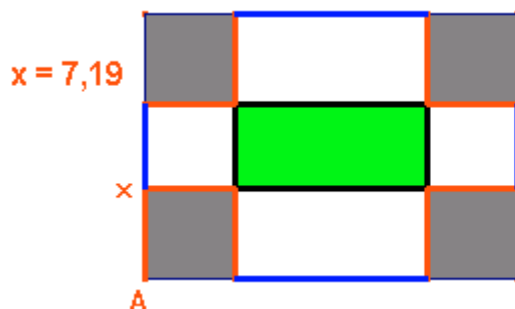
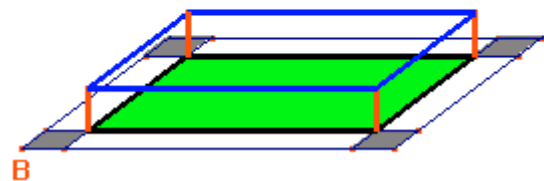
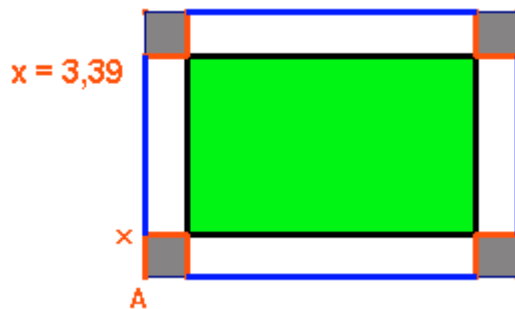
- Modélisation d'une situation concrète
- Problème d'optimisation, calcul d'un volume maximal en fonction de la longueur d'un segment

Connaissances préliminaires

- Volumes et surfaces des solides usuels
- Fonctions 3<sup>ième</sup>
- Systèmes d'équations à deux inconnues

### Énoncé

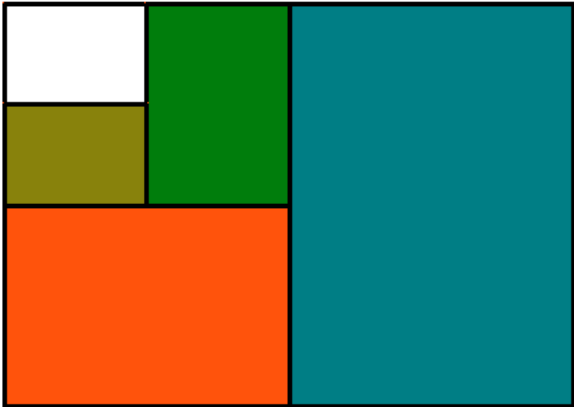
Dans les quatre coins d'une feuille A4 on découpe quatre petits carrés identiques dont la longueur d'un côté mesure  $x$  cm (voir figures). On replie ensuite les bords de la feuille pour obtenir ainsi une boîte en forme de parallélépipède rectangle. Déterminer la (les) valeur(s) approchée(s) à 0,01 près de  $x$  pour laquelle (lesquelles) le volume de la boîte est maximal.



### Rappel :

Une feuille rectangulaire A0 a une aire d' $1 \text{ m}^2$ . En partageant la feuille A0 en deux on obtient deux feuilles A1 dont le rapport  $\frac{\text{largeur}}{\text{longueur}}$  est le même que celui de la feuille A0.

Format A0 (grand rectangle)



Format A1  
Format A2  
Format A3  
Format A4

## Réponse

Soit  $a$  la longueur d'une feuille A0 et  $b$  sa largeur, alors :

$$\begin{cases} a > 0 \wedge b > 0 \\ ab = 1 \\ \frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{a}{2}} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2^{\frac{3}{4}}}{4} = 2^{\frac{1}{4}} \approx 1,189... \wedge b = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{2} = 2^{-\frac{1}{4}} \approx 0,840... \wedge \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



```

solve(a*b=1 and a/b=b/(a/2),{a,b})|a>0
a=2^9/4 and b=2^3/4
solve(a*b=1 and a/b=b/(a/2),{...
MAIN          DEG AUTO          FUNC 1/30
  
```

1<sup>ère</sup> ligne : solve(a\*b=1 and a/b=b/(a/2),{a,b})|a>0 and b>0

Longueur d'une feuille A4 en cm :  $a \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \cdot 100 = 25 \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 25 \cdot \sqrt[4]{2} \approx 29,73$  cm

Largeur d'une feuille A4 en cm :  $a \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \cdot 100 = \frac{25}{2} \cdot 2^{\frac{3}{4}} = \frac{25}{2} \cdot \sqrt[3]{16} \approx 21,02$  cm



```

2^1/4 * (sqrt(2)/2)^4 * 100 -> aa4          25 * 2^1/4
2^-1/4 * (sqrt(2)/2)^4 * 100 -> ba4          25 * 2^3/4
25 * 2^1/4          29.7301778751
25*2^(1/4)
MAIN          DEG AUTO          FUNC 2/30
  
```

Volume de la boîte en forme de parallélépipède rectangle en fonction de  $x$  :

$$V(x) = \left(25 \cdot 2^{\frac{1}{4}} - 2x\right) \cdot \left(25 \cdot 2^{-\frac{1}{4}} - 2x\right) \cdot x \text{ où } x \in \left[0; \frac{25 \cdot 2^{\frac{1}{4}}}{2}\right]$$



```

(aa4 - 2*x) * (ba4 - 2*x) * x -> v(x)      Done
v(0)          0
v(ba4/2)      0
v(2)          (25 * 2^1/4 - 4) * (25 * 2^3/4 - 8)
v(2)          875.979293949
v(2)
MAIN          DEG AUTO          FUNC 5/30
  
```

Avant de représenter graphiquement la fonction  $f$ , il est préférable de réaliser un tableau de valeurs afin d'optimiser les réglages à l'aide du menu WINDOW.

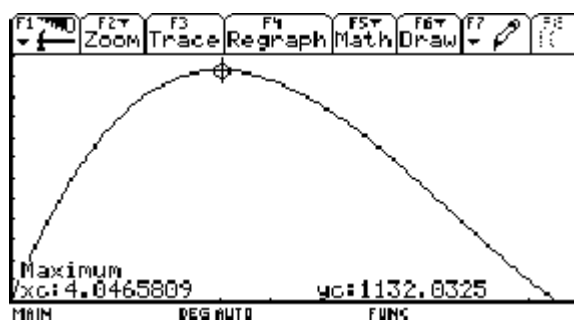
| F1    | F2        | F3     | F4      | F5      | F6 |
|-------|-----------|--------|---------|---------|----|
| Setup | Cell      | Header | Del Pos | Del Pos |    |
| X     | Y1        |        |         |         |    |
| 0.    | 0.        |        |         |         |    |
| 1.    | 527.49482 |        |         |         |    |
| 2.    | 875.97929 |        |         |         |    |
| 3.    | 1069.4534 |        |         |         |    |
| 4.    | 1131.9172 |        |         |         |    |
| 5.    | 1087.3706 |        |         |         |    |
| 6.    | 959.81365 |        |         |         |    |
| 7.    | 773.24635 |        |         |         |    |

Y1(x) = 875.97929394872

MAIN      DEG AUTO      FUNC

Représentation graphique de la fonction  $f$ :

Window : xmin = 0 ; xmax = 11 ; xscl = 1 ; ymin = 0 ; ymax = 1200 ; yscl = 100



D'après le graphique, le volume maximal de  $1132,03 \text{ cm}^3$  est atteint lorsque  $x = 4,05 \text{ cm}$ .