Trapèze dans un triangle

Fiche du professeur

Niveau : 3e BCD

Sujets et objectifs :

- Représentation d'une figure géométrique à partir d'un plan de construction
- Exprimer une aire et un périmètre en fonction d'une distance donnée en appliquant les théorèmes de Pythagore et de Thalès.
- Problème d'optimisation , recherche d'une aire maximale en fonction d'une distance et d'un périmètre minimal en fonction d'une distance

Connaissances préliminaires

- Fonctions 3ième
- Aire d'un trapèze, d'un triangle
- Pythagore
- Thalès

Enoncé

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $\overline{BA} = \overline{BC} = 6$, M un point quelconque du segment [AB], N le point de [BC] tel que $\overline{BN} = \overline{AM}$ et P le point d'intersection de [MC] et de la perpendiculaire à BC passant par N.

a) Déterminer, si possible, $\overline{AM}$ tel que l'aire du quadrilatère MBNP égale 6. Donner une (des) valeur(s) approchée(s) à 0,01 près.

b) Déterminer $\overline{AM}$ tel que l'aire du quadrilatère MBNP soit maximale. Donner une valeur approchée à 0,01 près.

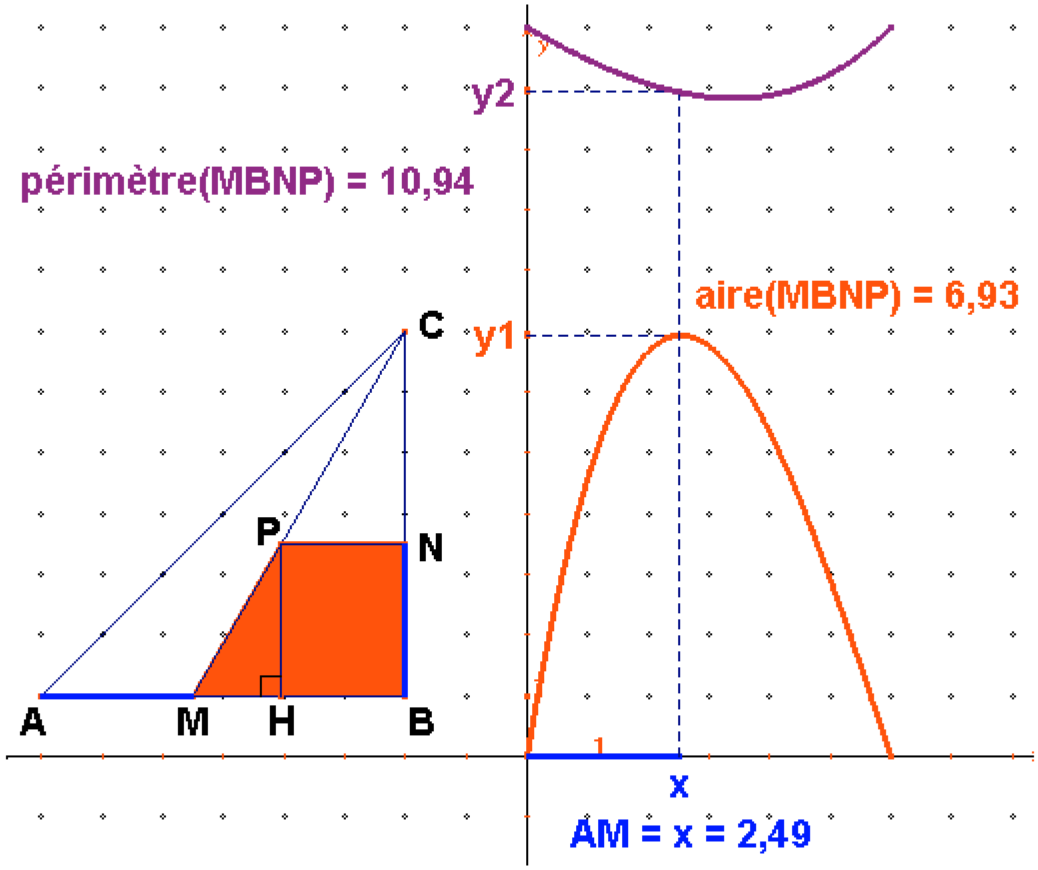
c) Déterminer la valeur exacte du périmètre du quadrilatère MBNP si $\overline{AM} = 2$.

d) Déterminer $\overline{AM}$ tel que le périmètre du quadrilatère MBNP soit minimal.

Donner une valeur approchée à 0,01 près.

Solution

Figure CABRI-géomètre (voir aussi document CABRI avec le même nom)



a) Posons : $\overline{AM} = x$, alors $0 \le x \le 6; \overline{MB} = 6 - x; \overline{BN} = x; \overline{CN} = 6 - x$.

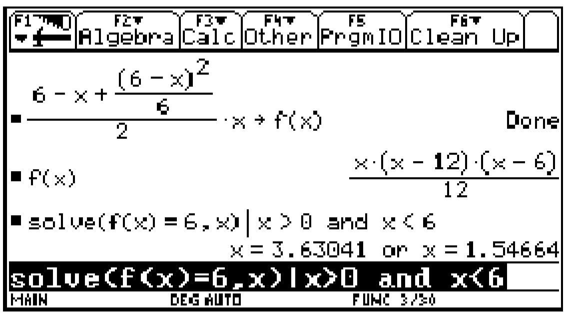
Théorème de Thalès dans le triangle BCM :

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{MB}} \Leftrightarrow \frac{6-x}{6} = \frac{\overline{PN}}{6-x} \Leftrightarrow \overline{PN} = \frac{(6-x)^2}{6}$$

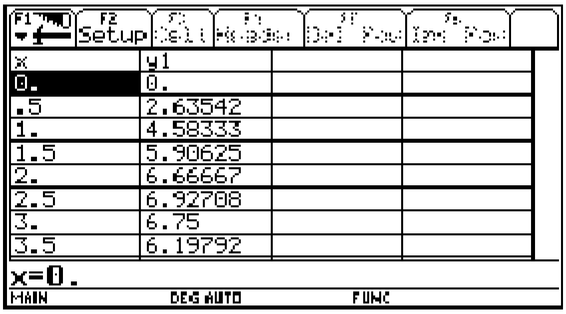
aire du trapèze MBNP : $\dfrac{\overline{MB} + \overline{PN}}{2} \cdot \overline{BN} = f(x) = \dfrac{6 - x + \dfrac{(6-x)^2}{6}}{2} \cdot x = \dfrac{1}{12}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 6x$

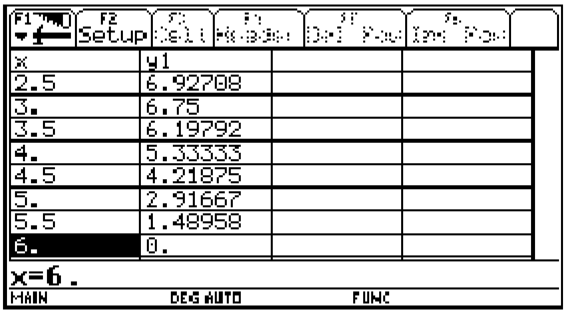
Déterminons $\overline{AM} = x$ tel que l'aire du trapèze MBNP vaut 6.

$$f(x) = 6 \Leftrightarrow x = 3,630... \vee x = 1,546... \Leftrightarrow x \approx 3,63 \vee x \approx 1,55$$



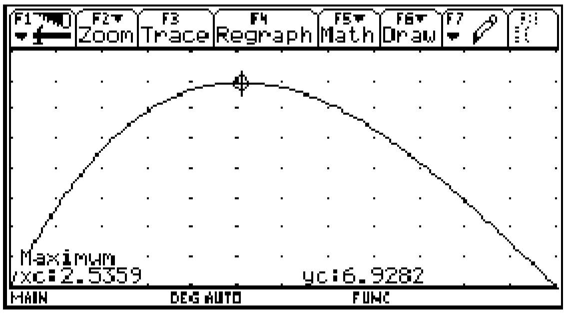
b) Tableau de valeurs





Représentation graphique

WINDOW : xmin = 0 ; xmax = 6 ;xscl = 0,5 ; ymin = 0 ; ymax = 8 ;yscl =1 ; xres = 1



D'après la représentation graphique, on voit que f admet un maximum sur [0 ;6].
Recherche du maximum de la fonction f sur l'intervalle [0 ;6] à l'aide de tableaux de valeurs :

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
0	0	2	6,666666667	2,4	6,912
1	4,583333333	2,1	6,75675	2,41	6,914310083
2	6,666666667	2,2	6,827333333	2,42	6,916440667
3	6,75	2,3	6,878916667	2,43	6,91839225
4	5,333333333	2,4	6,912	2,44	6,920165333
5	2,916666667	2,5	6,927083333	2,45	6,921760417
6	0	2,6	6,924666667	2,46	6,923178
		2,7	6,90525	2,47	6,924418583
		2,8	6,869333333	2,48	6,925482667
		2,9	6,817416667	2,49	6,92637075
		3	6,75	2,5	6,927083333
		3,1	6,667583333	2,51	6,927620917
		3,2	6,570666667	2,52	6,927984
		3,3	6,45975	2,53	6,928173083
		3,4	6,335333333	2,54	6,928188667
		3,5	6,197916667	2,55	6,92803125
		3,6	6,048	2,56	6,927701333
		3,7	5,886083333	2,57	6,927199417
		3,8	5,712666667	2,58	6,926526
		3,9	5,52825	2,59	6,925681583
		4	5,333333333	2,6	6,924666667

L'aire maximale du trapèze est atteinte lorsque $\overline{AM} \approx 2,54$.

c) Soit H le projeté orthogonal de P sur AB.
Théorème de Pythagore dans le triangle MHP :

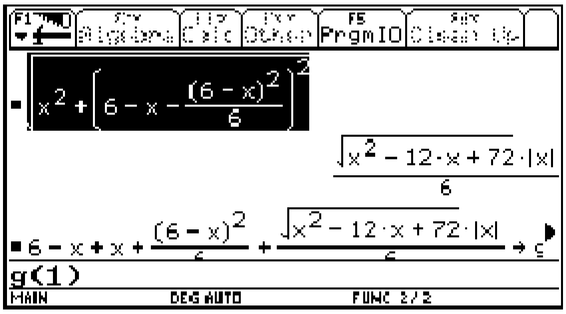
$$\overline{\mathrm{PM}}^2=\overline{\mathrm{PH}}^2+\overline{\mathrm{HM}}^2 \Leftrightarrow \overline{\mathrm{PM}}^2=x^2+\left[(6-x)-\frac{(6-x)^2}{6}\right]^2 \Leftrightarrow \overline{\mathrm{PM}}=\sqrt{\frac{x^4}{36}-\frac{x^3}{3}+2x^2}$$

périmètre du trapèze MBNP :

$$\overline{\mathrm{MB}}+\overline{\mathrm{BN}}+\overline{\mathrm{NP}}+\overline{\mathrm{PM}}$$

$$=g(x)=(6-x)+x+\frac{(6-x)^2}{6}+\sqrt{\frac{x^4}{36}-\frac{x^3}{3}+2x^2}=\frac{x^2}{6}-2x+12+\sqrt{\frac{x^4}{36}-\frac{x^3}{3}+2x^2}$$

Valeur exacte du périmètre du trapèze MBNP si $\overline{\mathrm{AM}}=2$: $g(2)=\dfrac{2\sqrt{13}+26}{3}$



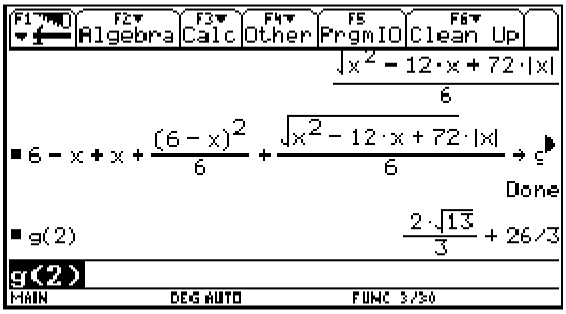
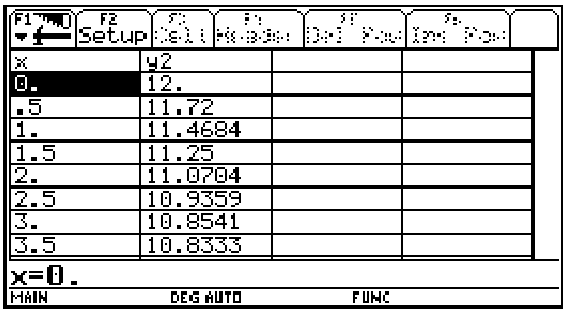
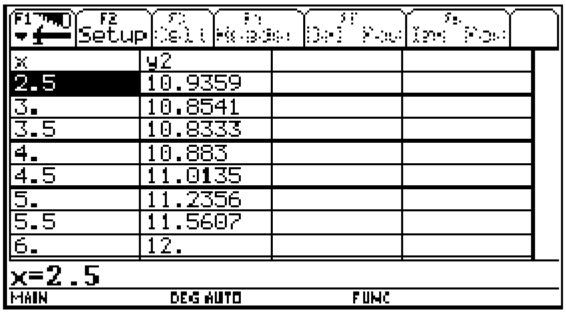


Tableau de valeurs



x	y2
0.	12.
.5	11.72
1.	11.4684
1.5	11.25
2.	11.0704
2.5	10.9359
3.	10.8541
3.5	10.8333

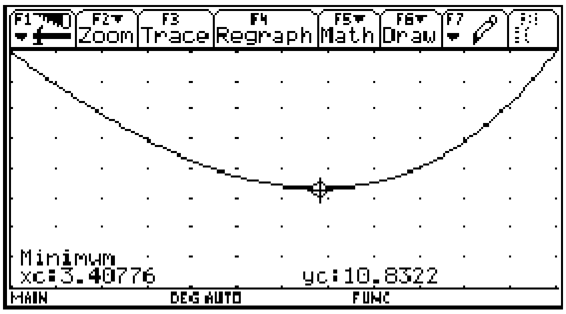
x=0.



x	y2
2.5	10.9359
3.	10.8541
3.5	10.8333
4.	10.883
4.5	11.0135
5.	11.2356
5.5	11.5607
6.	12.

x=2.5

Représentation graphique
WINDOW : xmin = 0 ; xmax = 6 ; xscl = 0,5 ; ymin = 10 ; ymax = 12 ; yscl = 0 25



D'après la représentation graphique, on voit que g admet un minimum sur [0 ;6].

Recherche du minimum de la fonction g sur l'intervalle [0 ;6] à l'aide de tableaux de valeurs :

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
0	12	2	11,07036752	3,3	10,83373251
1	11,46837495	2,1	11,03964069	3,31	10,83345468
2	11,07036752	2,2	11,01077453	3,32	10,83320353
3	10,85410197	2,3	10,98382681	3,33	10,83297913
4	10,88303688	2,4	10,95885691	3,34	10,83278158
5	11,23563544	2,5	10,93592583	3,35	10,83261093
6	12	2,6	10,91509621	3,36	10,83246728
		2,7	10,8964323	3,37	10,83235069
		2,8	10,88	3,38	10,83226124
		2,9	10,86586684	3,39	10,83219901
		3	10,85410197	3,4	10,83216408
		3,1	10,84477613	3,41	10,83215653
		3,2	10,83796168	3,42	10,83217643
		3,3	10,83373251	3,43	10,83222386
		3,4	10,83216408	3,44	10,8322989
		3,5	10,83333333	3,45	10,83240163
		3,6	10,83731866	3,46	10,83253213
		3,7	10,84419988	3,47	10,83269047
		3,8	10,85405814	3,48	10,83287673
		3,9	10,86697592	3,49	10,83309099
		4	10,88303688	3,5	10,83333333

Le périmètre minimal du trapèze est atteint lorsque $\overline{\mathrm{AM}} \approx 3,41$.