



Tronc d'arbre suspendu

Fiche du professeur

Niveau : 3e BCD

Sujets et objectifs :

- Modélisation d'une situation concrète
- Résolution numérique d'une équation.

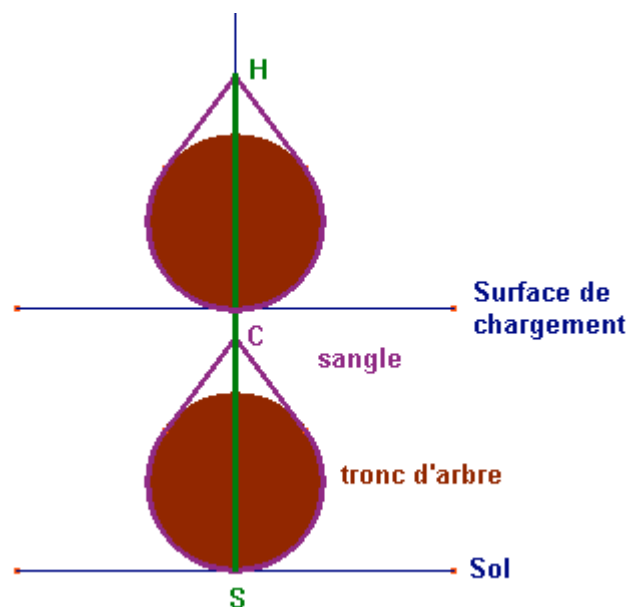
Connaissances préliminaires

- Trigonométrie dans un triangle rectangle
- Fonctions 3^{ième}
- Trigonométrie 4^{ième} + 3^{ième}

Enoncé

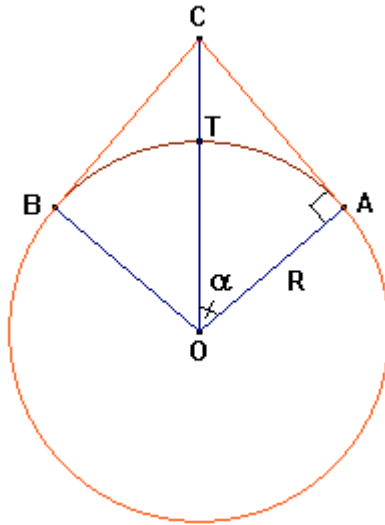
Un tronc d'arbre en forme de cylindre droit dont le diamètre mesure 80 cm est soulevé à l'aide d'une sangle (Tragriemen) de 3 m de long, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

- Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de la hauteur \overline{SH} à laquelle doit se trouver le crochet de la grue si on veut déposer le tronc sur un camion dont la surface de chargement se situe à 1,20 m du sol ?
- Calculer une valeur approchée à 0,01 près de la longueur maximale de la sangle pour charger le même tronc d'arbre sur le même camion si la hauteur maximale du crochet au-dessus du sol vaut 3,5 m ?



Réponse

- a) Considérons la figure suivante et déterminons la distance \overline{CT} en fonction de la longueur s de la sangle et du rayon R du tronc d'arbre.



$$\cos \alpha = \frac{R}{R + \overline{TC}} \Leftrightarrow R + \overline{TC} = \frac{R}{\cos \alpha} \quad (1)$$

$$\sin \alpha = \frac{\overline{CA}}{R + \overline{TC}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\frac{s}{2} - (\pi - \alpha)R}{R + \overline{TC}} \quad (2)$$

$$(1) \text{ dans } (2) : \sin \alpha = \frac{\frac{s}{2} - (\pi - \alpha)R}{\frac{R}{\cos \alpha}} \Leftrightarrow R \tan \alpha - R\alpha - \frac{s}{2} + \pi R = 0 \quad (3)$$

Si $R = 0,4$ et $s = 3$, l'équation (3) s'écrit :

$$0,4 \tan \alpha - 0,4\alpha - 1,5 + 0,4\pi = 0 \text{ où } \alpha \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$$

$$S_{\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[} = \{1,020\dots \text{rad}\}$$

$$V200 : (\text{nsolve}(0,4 \tan \alpha - 0,4\alpha - 1,5 + 0,4\pi = 0, \alpha) | \alpha > 0 \text{ and } \alpha < \frac{\pi}{2})$$

$$\text{donc : } \overline{TC} = \frac{R}{\cos \alpha} - R = \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} R = \frac{1 - \cos 1,020\dots}{\cos 1,020\dots} \cdot 0,4 = 0,364\dots \text{ m}$$

$$\text{et : } \overline{SH} = 1,2 + 2 \cdot 0,4 + 0,364\dots = 2,364\dots \text{ m}$$

La hauteur minimale du crochet au-dessus du sol pour une sangle de 3 m vaut 2,36 m.

- b) La hauteur maximale du crochet est atteinte lorsque $\overline{TC} = 3,5 - 1,2 - 2 \cdot 0,4 = 1,5$ m

$$\text{dans } (1) : \cos \alpha = \frac{R}{R + \overline{TC}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{0,4}{0,4 + 1,5} \Rightarrow \alpha = 1,358\dots \text{ car } \alpha \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\text{dans } (3) : R \tan \alpha - R\alpha - \frac{s}{2} + \pi R = 0$$

$$\Leftrightarrow s = 2R(\tan \alpha - \alpha + \pi) = 2 \cdot 0,4 \cdot (\tan 1,358\dots - 1,358\dots + \pi) = 5,141\dots$$

La longueur maximale de la sangle vaut donc 5,14 m.