# *La table de Jo*

*Fiche du professeur*

Niveau : 3e BCD
Sujets et objectifs :
- Problème d'optimisation

Connaissances préliminaires
- Fonctions 3$^{\text{ième}}$
- Trigonométrie dans un triangle rectangle
- Aire d'un disque, d'un triangle,volume d'un cylindre droit

## Enoncé

**Jo projette de fabriquer une table circulaire en granit de 3 cm d'épaisseur. A l'intérieur de ce disque en granit, il aimerait découper un triangle isocèle qui serait ensuite remplacé par une plaque en verre d'une épaisseur de 12 mm (cf. les deux figures ci-après).**

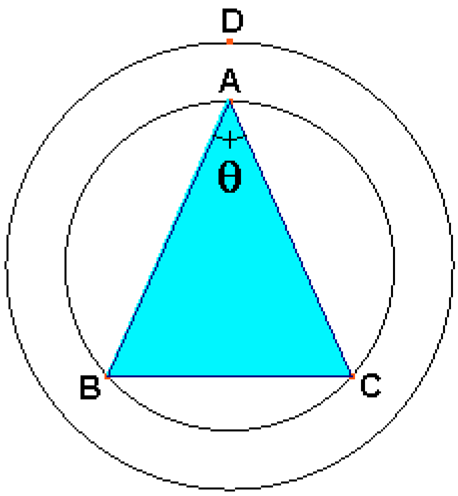
**On donne :**

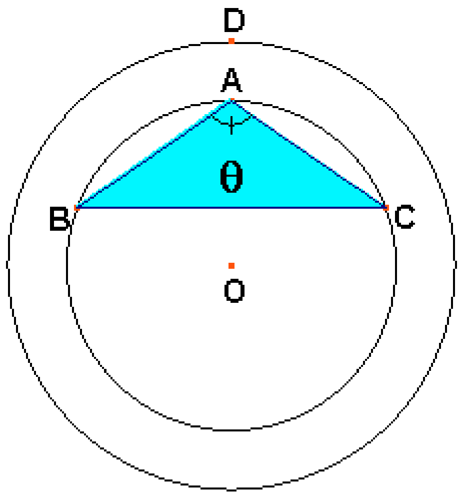
**le rayon de la table** $\overline{OD} = 115\ cm$ **;**

**le rayon du cercle circonscrit au triangle isocèle** $\overline{OA} = 100\ cm$ **;**

**la densité du granit** $\rho_{granit} = 2{,}8 kg/dm^3$ **;**

**la densité du verre** $\rho_{verre} = 2{,}5 kg/dm^3$ **.**



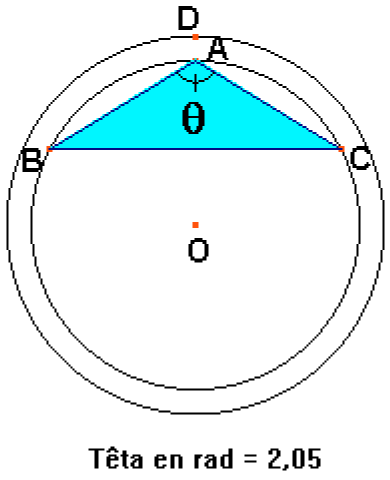

**a) Pour quelle(s) valeur(s) de $\theta$ la masse de l'ensemble granit-verre est-elle minimale ?**

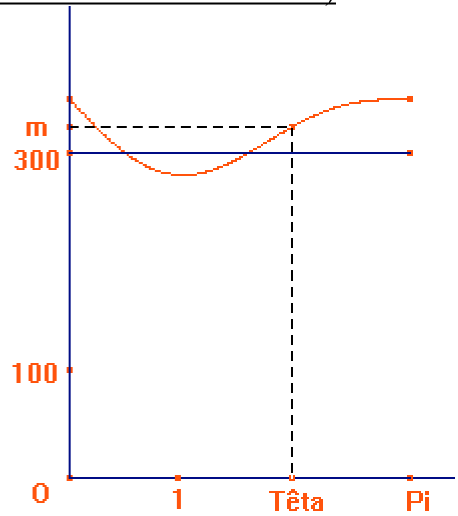
**b) Donner la valeur du minimum. On demande des valeurs approchées à 0,01 près.**

**c) Pour quelle(s) valeur(s) de $\theta$ la masse de l'ensemble granit-verre est-elle inférieure à 300 kg ? On demande des valeurs approchées à 0,01 près.**

Réponse

Figure CABRI-géomètre (voir aussi document CABRI avec le même nom)

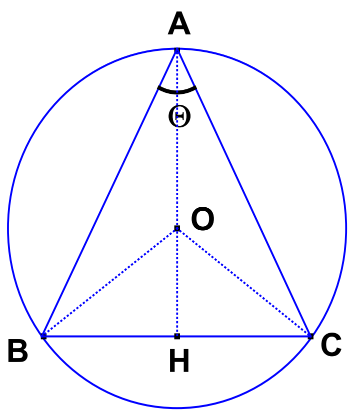


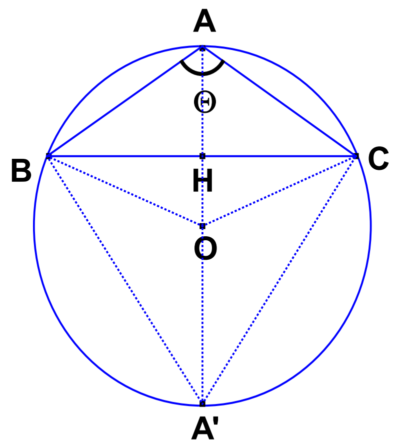




Aire du disque de rayon $\overline{\mathrm{OD}}$ en $dm^2$ : $\pi \cdot 11{,}5^2$

Pour calculer l'aire du triangle ABC, distinguons deux cas :

1°) $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ 2°) $\theta \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$




$\widehat{\mathrm{BOC}} = 2\theta$

$\widehat{\mathrm{BOH}} = \theta$

$\widehat{\mathrm{HBO}} = \frac{\pi}{2} - \theta$

$\overline{\mathrm{BC}} = 2r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2r\sin\theta$

$\overline{\mathrm{AH}} = r \cdot \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = r \cdot (1 + \cos\theta)$

$\widehat{\mathrm{CA'B}} = \pi - \theta$

$\widehat{\mathrm{COB}} = 2\pi - 2\theta$

$\widehat{\mathrm{OBH}} = \theta - \frac{\pi}{2}$

$\overline{\mathrm{BC}} = 2r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 2r\sin\theta$

$\overline{\mathrm{AH}} = r \cdot \left(1 - \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) = r \cdot (1 + \cos\theta)$

Dans les deux cas, on obtient la même formule :

$$aire(\mathrm{ABC}) = \frac{\overline{\mathrm{BC}} \cdot \overline{\mathrm{AH}}}{2} = \frac{2r\sin(\theta) \cdot r\left(1 + \cos(\theta)\right)}{2} = r^2 \sin\theta(1 + \cos\theta)$$

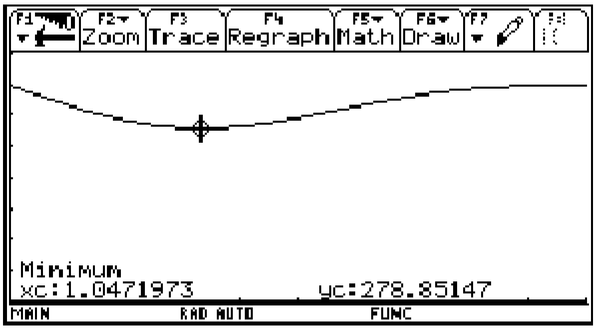
Aire du triangle ABC en $dm^2$ : $100 \cdot \sin\theta \cdot (1 + \cos\theta)$ $(\theta \text{ en } rad)$

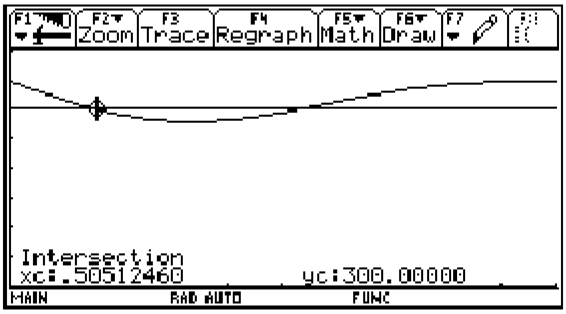
Masse de la table en *kg* en fonction de $\theta$ en rad :

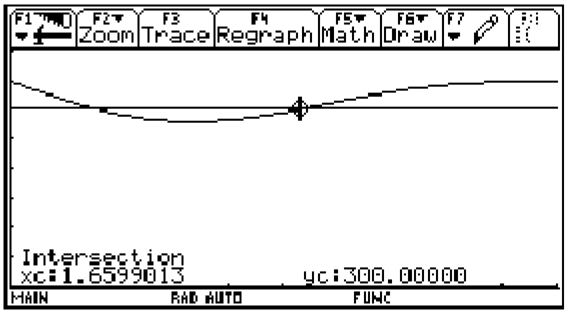
$$m(\theta)=\left(11,5^2\pi-100\cdot\sin\theta\cdot(1+\cos\theta)\right)\cdot 0,3\cdot 2,8+100\cdot\sin\theta\cdot(1+\cos\theta)\cdot 0,12\cdot 2,5$$

<u>Représentation graphique de la fonction *m*</u>

Window : xmin = 0 ; xmax = $\pi$ ; ymin = 0 ; ymax = 400




La masse de l'ensemble granit-verre est-elle minimale si $\theta \approx 1,05\,rad$ et vaut 278,85 kg.

La masse de l'ensemble granit-verre est inférieure à 300 kg si $\theta \in [0,50\,rad\,;1,66\,rad]$.