Une tige passant dans un couloir …

Fiche du professeur

<u>Niveau</u> : 3e BCD

<u>Sujets et objectifs</u> :

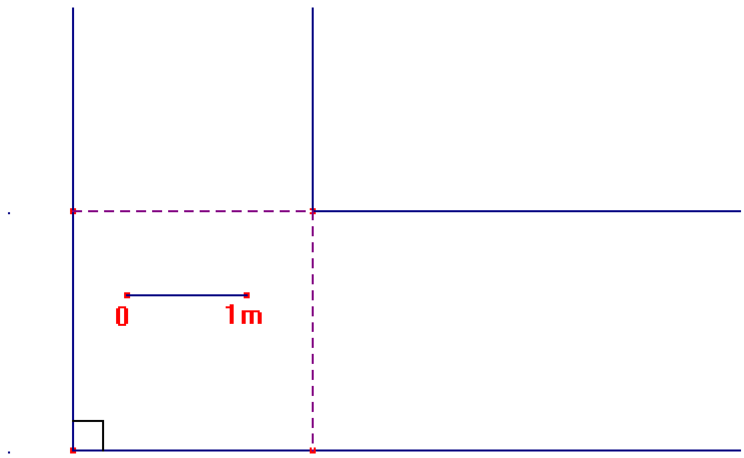
- Modélisation mathématique et mise en équation.
- Problème d'optimisation, recherche du minimum d'une fonction.
- Résolution d'un problème par deux méthodes différentes

<u>Connaissances préliminaires</u>

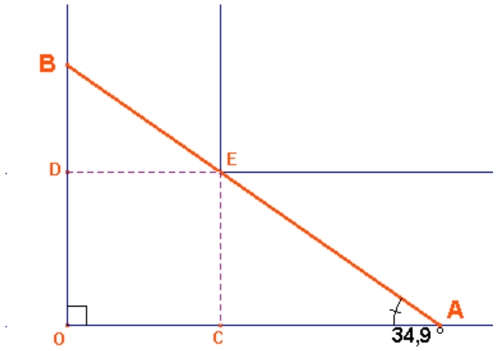
- Pythagore
- Thalès
- Fonctions 3ième

Enonce

Quelle est la longueur maximale d'une tige métallique (d'épaisseur négligeable) qui doit passer dans un couloir large de 2 m et tournant en angle droit comme indiqué sur la figure ci-dessous ? La tige devra rester en permanence parallèle au sol. Donner une valeur approchée du résultat à 0,01 près.



Solution



1$^{\text{ère}}$ méthode

On exprime $\overline{\mathrm{AB}}$ en fonction de $\overline{\mathrm{CA}}$ et on cherche le minimum de $\overline{\mathrm{AB}}$.

Théorème de Pythagore dans le triangle OAB :

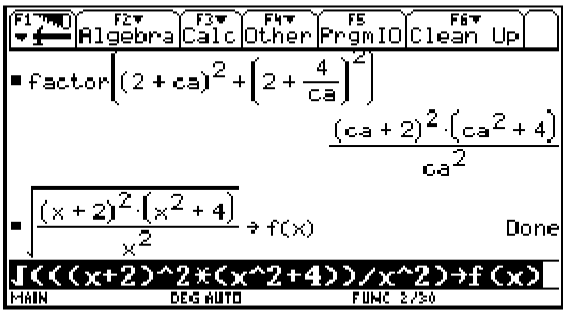
$$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2=\left(2+\overline{\mathrm{CA}}\right)^2+\left(2+\overline{\mathrm{DB}}\right)^2 \quad (1)$$

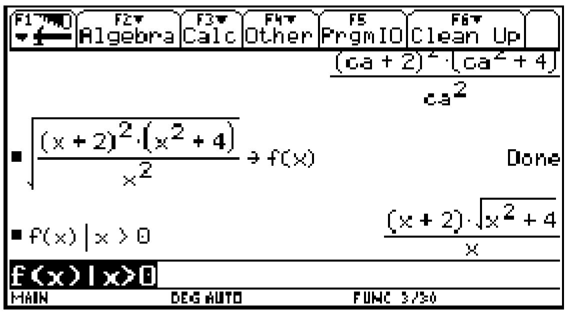
Les triangles OAB, CAE et DEB sont semblables, donc :

$$\frac{2+\overline{\mathrm{CA}}}{2+\overline{\mathrm{DB}}}=\frac{\overline{\mathrm{CA}}}{2}=\frac{2}{\overline{\mathrm{DB}}}\Rightarrow \overline{\mathrm{DB}}=\frac{4}{\overline{\mathrm{CA}}} \quad (2)$$

(2) dans (1) : $\overline{\mathrm{AB}}^2=\left(2+\overline{\mathrm{CA}}\right)^2+\left(2+\dfrac{4}{\overline{\mathrm{CA}}}\right)^2=\dfrac{\left(\overline{\mathrm{CA}}+2\right)^2\left(\overline{\mathrm{CA}}^2+4\right)}{\overline{\mathrm{CA}}^2}$

Posons : $\overline{\mathrm{CA}}=x$; $\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right): f(x)=\sqrt{\dfrac{\left(\overline{\mathrm{CA}}+2\right)^2\left(\overline{\mathrm{CA}}^2+4\right)}{\overline{\mathrm{CA}}^2}}=\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\sqrt{x^2+4}$

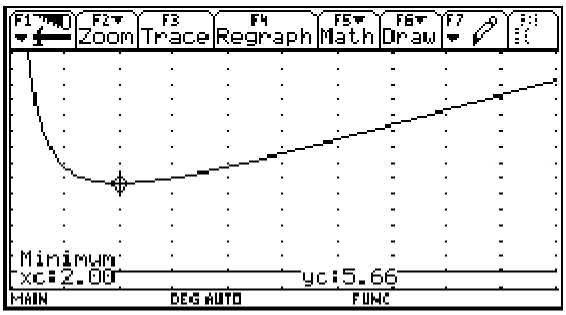




$\overline{\mathrm{AB}}$ est minimal lorsque f atteint un minimum sur $\left]0;+\infty\right[$

Représentation graphique de la fonction f

Window : xmin = 0 ; xmax = 10 ; xscl = 1 ; ymin = -1 ; ymax = 14 ; yscl = 1



La longueur de la plus grande tige qu'on peut tourner dans un couloir de 2 m de large qui forme un angle droit est $4\sqrt{2}\approx 5{,}66$ m

2ième méthode

On exprime $\overline{\mathrm{AB}}$ en fonction de $\theta = \widehat{\mathrm{BAO}}$ et on cherche le minimum de $\overline{\mathrm{AB}}$

$\sin\theta = \dfrac{2}{\overline{\mathrm{EA}}} \Rightarrow \overline{\mathrm{EA}} = \dfrac{2}{\sin\theta}$; $\cos\theta = \dfrac{2}{\overline{\mathrm{BE}}} \Rightarrow \overline{\mathrm{BE}} = \dfrac{2}{\cos\theta}$

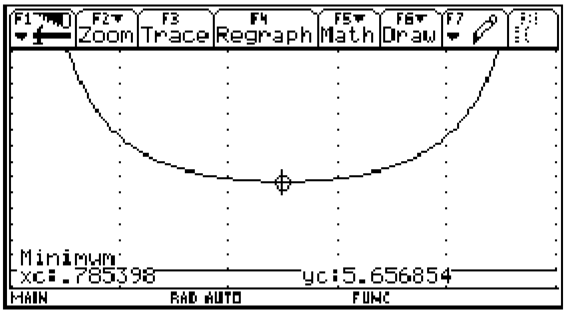
$$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{EA}} + \overline{\mathrm{BE}} = \frac{2}{\sin\theta} + \frac{2}{\cos\theta} = \left[\frac{2(\cos\theta + \sin\theta)}{\cos\theta\sin\theta} = \frac{4\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\theta}\right]$$

Posons : $\left(\forall\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right) : g(\theta) = \dfrac{2}{\sin\theta} + \dfrac{2}{\cos\theta}$

$\overline{\mathrm{AB}}$ est minimal lorsque g atteint un minimum sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

Représentation graphique de la fonction g

Window : xmin = 0 , xmax = $\dfrac{\pi}{2}$; xscl = $\dfrac{\pi}{10}$; ymin = -1 ; ymax = 14 ; yscl = 1



Le minimum de g est atteint lorsque $\theta = 0,78539...rad$ et vaut

$$g(0,78539...) = \frac{2}{\sin(0,78539...)} + \frac{2}{\cos(0,78539...)} \approx 5,66$$

La longueur de la plus grande tige qu'on peut tourner dans un couloir de 2 m de large qui forme un angle droit est 5,66 m