



## Joyeux anniversaire

*Fiche du professeur*

Genre du document : exercice

Niveau : 3e B C D

Sujets et objectifs : Simulation du célèbre « problème de l'anniversaire » ;  
confirmation des résultats par le calcul.

Connaissances préliminaires : fréquence absolue, fréquence relative, calcul de la probabilité d'un événement, les modules seq<sup>(1)</sup> et rand()<sup>(2)</sup>

### Énoncé

- 1) *Si je pariais avec vous que dans votre classe comptant .... élèves, deux élèves au moins fêtent leur anniversaire le même jour de l'année, accepteriez-vous mon pari ?*
- 2) *Accepteriez-vous ce même pari pour une autre classe de notre établissement comptant 20, 25, 30 .... élèves ?*
- 3) *Hier soir j'ai proposé le même pari à un collègue avec qui je prenais un verre dans un bistrot comptant 50 clients. Celui de nous deux qui perdrait devrait payer les consommations. A votre avis avais-je une chance raisonnable de gagner ce pari ?*
- 4) *Combien de personnes au moins auraient dû être présentes au bistrot pour que ma chance de gagner fût supérieure à 50% ?*

*Tournez s.v.p.*

<sup>1</sup> Seq( c.-à-d. sequence - voir la fiche technique Simulations1

<sup>2</sup> Pour une explication détaillée concernant le module rand(), voir la fiche technique Simulations1

### Quelques indications :

Supposons que les naissances soient uniformément réparties sur toute l'année et ignorons les années bisextiles :

l'expérience aléatoire qui consiste à choisir une personne pour la questionner au sujet du jour de son anniversaire, revient à lancer un dé à 365 faces, chaque face ayant la même chance d'apparaître.

Interroger  $n$  personnes revient donc à **lancer simultanément  $n$  dés à 365 faces** (ou encore à lancer  $n$  fois de suite un dé à 365 faces).

- Répondez aux questions 1) et 3) en simulant, dans l'écran de calcul, le lancer de  $n$  dés à 365 faces ( $n$  égal au nombre des élèves de la classe, puis  $n$  égal à 50).

*(A chaque lancer de  $n$  dés, les nombres sortants seront inscrits dans une liste dont les éléments seront classés par ordre croissant. On examinera soigneusement cette liste ordonnée pour y déceler éventuellement deux nombres égaux.*

*Chaque élève de la classe répétera l'expérience une vingtaine de fois environ en notant à chaque fois si oui ou non au moins deux nombres égaux sont apparus.*

*Les résultats de la classe entière seront recueillis pour calculer la fréquence relative de l'événement  $A$ : "il sort une liste comportant au moins deux fois un même nombre".)*

- Retrouvez par le calcul les conclusions précédentes et répondez aux autres questions.

Réponse:

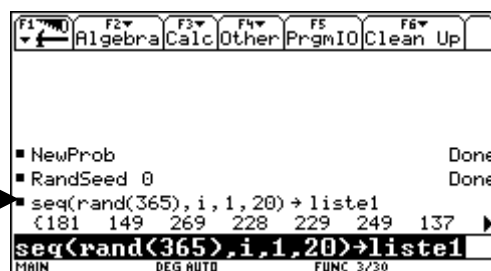
a) Simulation du lancer de  $n=20^3$  dés à 365 faces

$seq(rand(365),i,1,20) \rightarrow listel$

La V200 sort une liste de 20

nombres entiers choisis au hasard

entre 1 et 365 sauvegardée sous le nom *listel*.



Afin d'examiner s'il s'y trouve au moins

deux résultats identiques, on **classe les**

**éléments de cette liste** par ordre

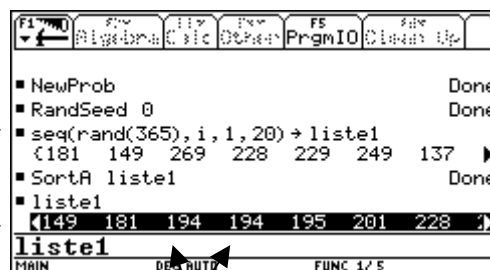
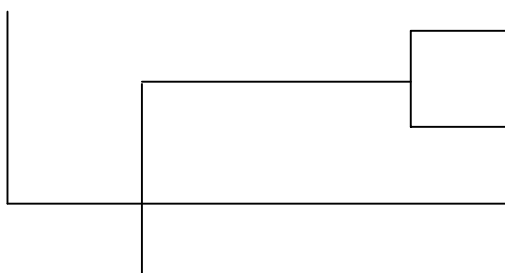
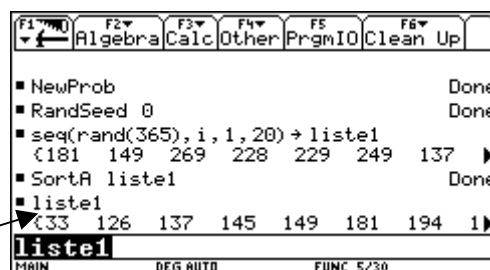
croissant: taper *SortA listel*<sup>4</sup>.

En tapant *listel*, on fait réapparaître la

liste triée par ordre croissant.

En parcourant la *listel*, on constate que le

nombre 194 apparaît deux fois.



Répéter cette expérience un grand nombre de fois en notant à chaque fois si oui ou non au moins deux résultats identiques apparaissent.

Dans une classe d'une vingtaine d'élève, il suffirait ainsi que chaque élève répète l'expérience une vingtaine de fois, avec sa propre V200, pour que l'on dispose finalement d'un nombre suffisamment élevé d'expériences permettant de tirer des conclusions plus ou moins fiables sur la fréquence relative et donc sur la probabilité de l'événement *A*.

<sup>3</sup> On admettra que dans la classe il y a 20 élèves.

<sup>4</sup> *SortA* = tri **A**scendant; *SortD* = tri **D**escendant

## b) Vérification des résultats par le calcul

L'expérience aléatoire consiste à lancer simultanément  $n$  dés à 365 faces.

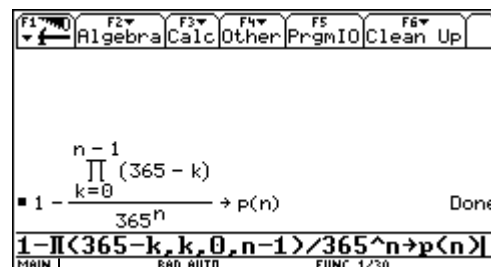
Un événement élémentaire est donc une liste ordonnée, avec répétition, de  $n$  nombres entiers compris entre 1 et 365 (au sens large).

Si les dés sont tous parfaitement équilibrés, on peut admettre que les événements élémentaires sont équiprobables.

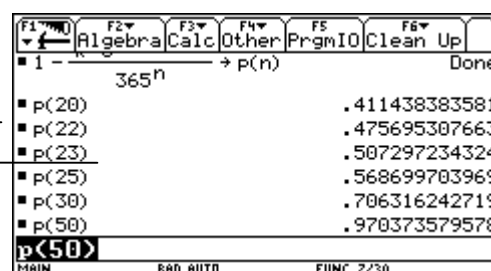
Soit  $A$  l'événement "il sort une liste comportant au moins deux fois un même nombre".

L'événement contraire  $\bar{A}$  est l'événement "il sort une liste comportant des nombres 2 à 2 différents".

$$\begin{aligned}
 P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\
 &= 1 - \frac{\#\bar{A}}{\#\Omega} \\
 &= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - (n - 1))}{365^n} \\
 &= 1 - \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (365 - k)}{365^n}.
 \end{aligned}$$



Taper :  $\prod$  G  $\alpha$  P  
 On retrouve également le symbole « product » dans le CATALOG (au-dessus de la touche 2)



$$P(A) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow n \geq 23.$$

## Pour les amateurs de programmation<sup>5</sup>:

Le programme suivant permet de simuler  $r$  lancers de  $n$  dés à 365 faces et de déterminer la fréquence relative de l'événement  $A$  :

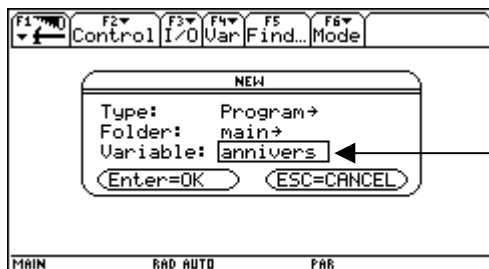
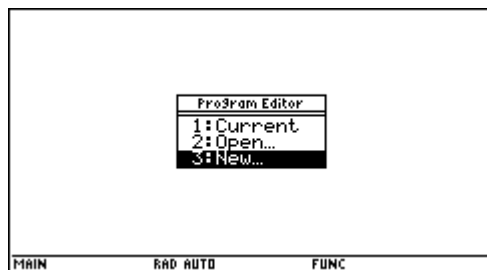
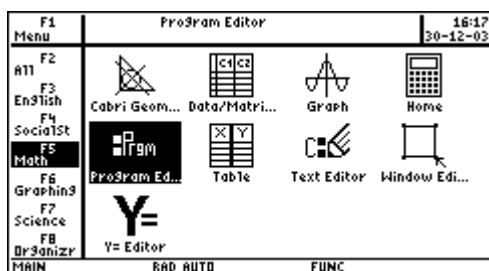
```

F1 Control I/O Var Find... Mode
:annivers(n,r)
:Prgm
:ClrIO
:Local j,i,liste1,liste2,k
:0→k
:For j,1,r
:  seq(rand(365),i,1,n)→liste1
:  SortA liste1
:  ΔList(liste1)→liste2
:  If product(liste2)=0 Then
:    k+1→k
:  EndIf
:EndFor
:Disp "nombre de personnes:",n,"fréquenc
e relative:",approx(k/r)
:EndPrgm
MAIN RAD AUTO FUNC

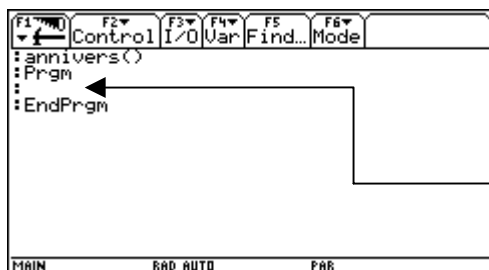
```

### Explications:

La rédaction d'un programme se fait à l'aide de l'application Program Editor de la V200.



Donner un **nom** au programme



Tout programme commence par

- son **nom** suivi de ( )
- **Prgm**
- .....
- .... et se termine par
- **EndPrgm**.

Entrer les instructions du programme entre **Prgm** et **EndPrgm**.  
Toutes les lignes de programme commencent par deux-points.  
On passe d'une ligne à l'autre par , .

<sup>5</sup> Il se trouve une bibliographie à la fin du document à l'intention des collègues intéressés par la programmation de la V200.

Numérotons de 1 à 15 les lignes du programme:

Ligne	1	→	:annivers(n,r)
	2		:Prgrm
	3		:ClrIO
	...		:Local j,i,liste1,liste2,k
			:k←0
			:For j,1,r
			seq(rand(365),i,1,n)→liste1
			SortA liste1
			ΔList(liste1)→liste2
			If product(liste2)=0 Then
			k+1→k
			EndIf
			:EndFor
			:Disp "nombre de personnes:",n,"fréquenc
			e relative:",approx(k/r)
	15	→	:EndPrgrm

**Ligne 1:**  $n$  et  $r$  sont deux paramètres dont dépend le programme et qu'on choisira lorsqu'on fera exécuter le programme;

$n$  = le nombre de dés qui sont lancés simultanément;

$r$  = le nombre de fois que cette expérience est répétée.

**Ligne 3:** Clear Input-Output, e.d.m. l'écran d'entrée et de sortie, où s'affichera le résultat du programme, est nettoyé avant chaque nouvelle exécution du programme.

**Ligne 4:** Définition des variables utilisées à l'intérieur du programme; il s'agit de variables **locales** (Local) (par opposition aux variables globales). Une variable locale est une variable temporaire qui existe uniquement pendant le processus d'exécution d'un programme. Une fois le programme terminé, les variables locales sont supprimées automatiquement.

**Ligne 5:** La variable  $k$  est un "compteur" destiné à compter le nombre de fois que l'événement  $A$  est réalisé.

Ici le compteur  $k$  est "mis à zéro".

**Lignes 6 et 13:For...EndFor**

Boucle destinée à répéter certaines instructions (ici le lancer des  $n$  dés suivi du contrôle si un même résultat apparaît au moins deux fois).

**For...EndFor** utilise le compteur  $j$  pour contrôler le nombre de répétitions de la boucle.

La syntaxe de l'instruction **For** est la suivante :

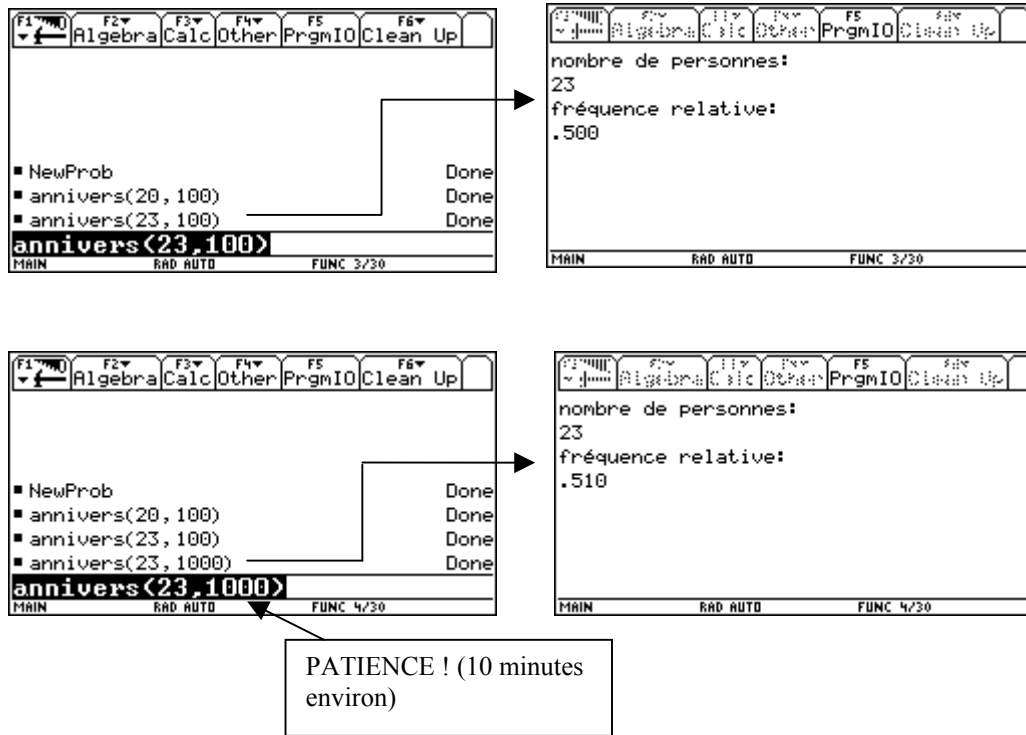
**For**  $j$ (=*le compteur*),  $1$  (= *début*),  $r$  (= *fin*)

**Ligne 7:** on lance simultanément  $n$  dés;

le résultat est sauvegardé dans une liste nommée *liste1*.

**Ligne 8:** la *liste1* est triée par ordre croissant.





## Bibliographie

Il existe deux articles sur la programmation de **Thomas Himmelbauer**: "Funktionen und Programme auf dem TI-92 und TI-89" et "Programme für den TI-92". On peut les télécharger aux adresses <http://www.acdca.ac.at/material/allgem/programh.htm>. et [http://www.acdca.ac.at/material/allgem/g\\_himpro.htm](http://www.acdca.ac.at/material/allgem/g_himpro.htm).

Un autre article de **Jürgen Wagner** "Programmierung des TI-92/Voyage 200" peut être téléchargé à l'adresse <http://j.wagner.bei.t-online.de/>.