Le problème de Galilée

Fiche du professeur

Genre du document : exercice

Niveau : 3e B C D

Sujets et objectifs : Simulation du lancer de 3 dés et calcul de la somme des résultats ; détermination de la fréquence relative des sommes 9 et 10 ; confirmation des résutats par le calcul.

Connaissances préliminaires : fréquence absolue, fréquence relative, calcul de la probabilité d'un événement, le module rand()[1], l'application Data/Matrix Editor

Enoncé :

Le prince de Toscane, grand amateur de jeux de hasard, demanda un jour à Galilée :

- Pourquoi, en jetant trois dés, obtient-on plus souvent la somme 10 que la somme 9 ?
- Ne faudrait-il pas que ces deux sommes sortent l'une aussi souvent que l'autre, étant donné qu'on les obtient chacune de six façons différentes :

$$9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3$$
$$10 = 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+3+4 \text{ ?}$$

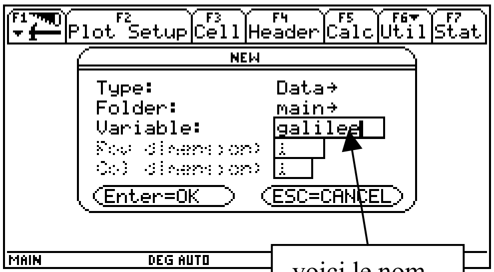
A) Prends position par rapport aux affirmations du prince de Toscane en déterminant, dans une simulation de 500 lancers de trois dés, les fréquences absolues, puis relatives des sommes 9 et 10.

B) Quelle a pu être la réponse de Galilée aux deux questions du prince ?

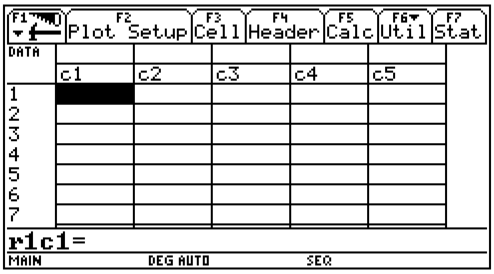
[1] Pour une explication détaillée concernant le module rand(), voir la fiche technique Simulations1

Solutions :

A) Ouvrir un nouveau fichier dans le Data/Matrix Editor :



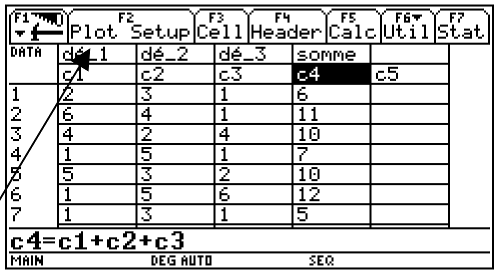
voici le nom du fichier



Définir les colonnes c1, c2 et c3 comme suit :

c1=seq(rand(6),i,1,500), faire de même pour c2 et c3,

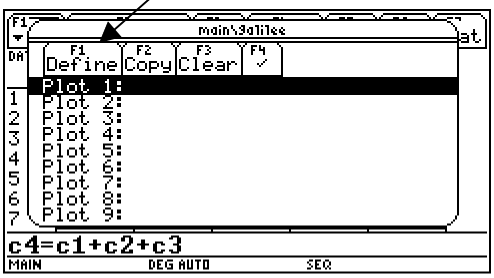
puis : c4=c1+c2+c3.[2]

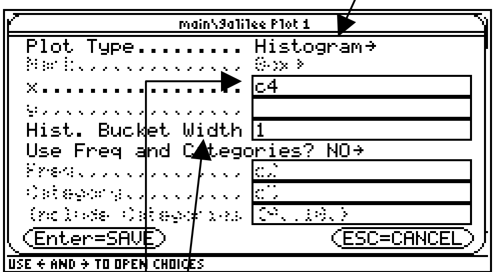


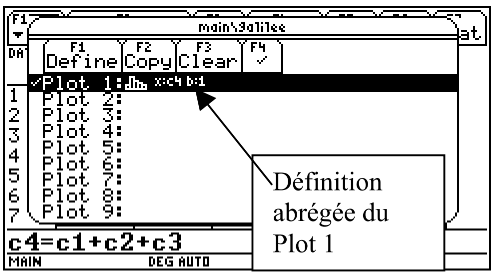
Chaque ligne du tableau contient les résultats d'un lancer de 3 dés (colonnes c1, c2 et c3) ainsi que la somme des trois résultats (colonne 4).

On déterminera **la fréquence absolue des sommes 9 et 10** à l'aide d'un **histogramme**[3] :

Par „ Plot Setup, puis ƒ Define, configurer la représentation graphique des données de la colonne c4.







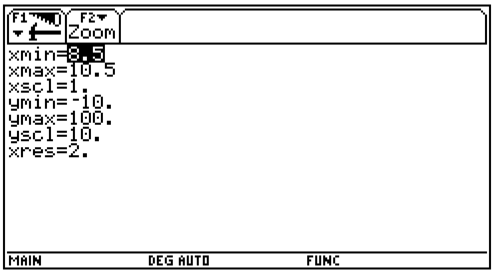
Définition abrégée du Plot 1

Dans c4 se trouvent les valeurs dont on aimerait déterminer les fréquences. Les valeurs sont **partagées en classes de largeur 1** (voir également : choix des dimensions de la fenêtre)

[2] Voir remarque n° 2 à la fin du document

[3] La V200 doit être réglée en mode graphique FUNCTION

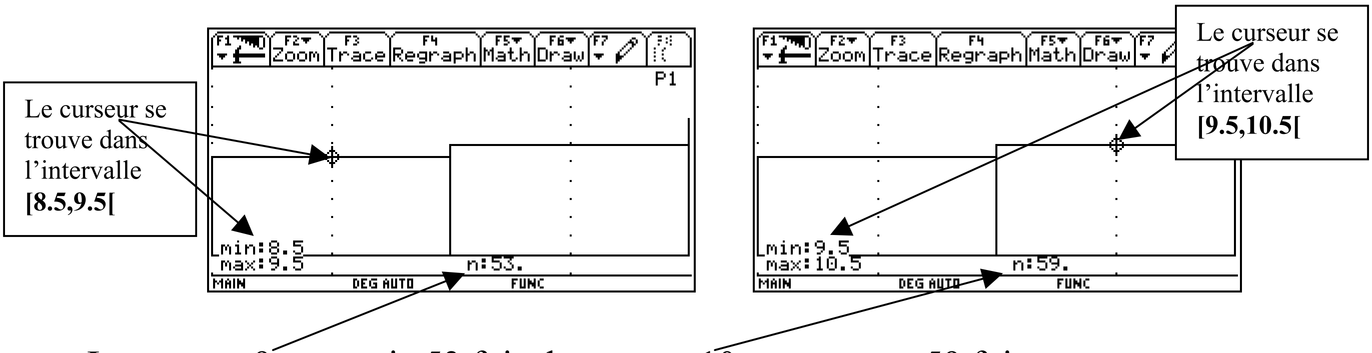
Choix de la fenêtre par ¥ Window[4] :



Remarquer le choix de xmin et de xmax ;
<u>xmin = début de la 1ère classe</u>. Comme la largeur des classes est 1, la V200 comptera les valeurs appartenant aux intervalles semi-ouverts [8.5,9.5[et [9.5,10.5[, e.d.m. elle comptera les valeurs 9 et 10.

Représentation graphique par ¥ Graph.

… Trace permet de lire les fréquences absolues des sommes 9 et 10[5]:



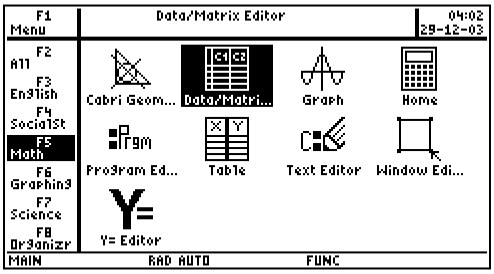
La somme 9 est sortie 53 fois, la somme 10 est apparue 59 fois.

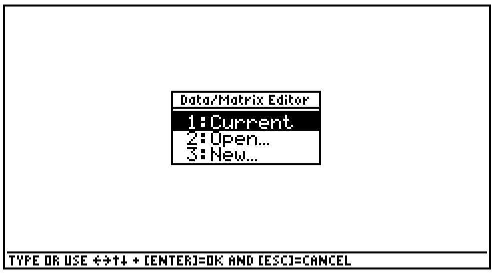
Dans cette simulation, la fréquence relative de « 9 » est donc $\frac{53}{500} \simeq 0{,}1060$, soit 10,60%, celle de « 10 » vaut $\frac{59}{500} \simeq 0{,}1180$, soit 11,80%.

L'observation du prince de Toscane, à savoir qu'on obtient plus souvent la somme 10 que la somme 9, est confirmée par cette simulation-ci.

[4] La V200 doit être réglée en mode graphique FUNCTION!
[5] Voir remarque n°1 à la fin du document.

On pourra revenir au fichier Current du Data/Matrix Editor .





Les 4 colonnes c1 à c4 sont recalculées automatiquement : la simulation est répétée. En revenant à l'histogramme par ¥ Graph on aura l'occasion de confirmer une seconde fois (ou d'infirmer) l'observation du prince de Toscane.

B) L'expérience aléatoire consiste à lancer simultanément 3 dés (que l'on suppose avoir numérotés : dé_1, dé_2 et dé_3).

Un événement élémentaire est un triplet[6] $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ avec $1 \leq a,b,c \leq 6$.

On admet que les trois dés sont parfaitement équilibrées, ce qui entraîne que les événements élémentaires sont équiprobables.

Notons A_9 l'événement « obtenir un triplet (a,b,c) tel que $a+b+c=9$ » et notons A_{10} l'événement « obtenir un triplet (a,b,c) tel que $a+b+c=10$ ».

$$\begin{aligned}A_9 = \{&(1,2,6),(1,3,5),(1,4,4),(1,5,3),(1,6,2),\\ &(2,1,6),(2,2,5),(2,3,4),(2,4,3),(2,5,2),(2,6,1),\\ &(3,1,5),(3,2,4),(3,3,3),(3,4,2),(3,5,1),\\ &(4,1,4),(4,2,3),(4,3,2),(4,4,1),\\ &(5,1,3),(5,2,2),(5,3,1),\\ &(6,1,2),(6,2,1)\}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}A_{10} = \{&(1,3,6),(1,4,5),(1,5,4),(1,6,3),\\ &(2,2,6),(2,3,5),(2,4,4),(2,5,3),(2,6,2),\\ &(3,1,6),(3,2,5),(3,3,4),(3,4,3),(3,5,2),(3,6,1),\\ &(4,1,4),(4,2,4),(4,3,3),(4,4,2),(4,5,1),\\ &(5,1,4),(5,2,3),(5,3,2),(5,4,1),\\ &(6,1,3),(6,2,2),(6,3,1)\}\end{aligned}$$

.

L'ensemble Ω de tous les événements élémentaires est l'ensemble de tous les triplets $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ avec $1 \leq a,b,c \leq 6$, et on a donc

$$P(A_9) = \frac{\# A_9}{\#\Omega} = \frac{25}{6^3} = \frac{25}{216} \cong 0{,}1157 \text{, soit environ } 11{,}57\ \%$$

et $$P(A_{10}) = \frac{\# A_{10}}{\#\Omega} = \frac{27}{6^3} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8} = 0{,}125 \text{, soit } 12{,}5\ \%.$$

[6] ou encore une liste ordonnée, avec répétition, de 3 entiers compris entre 1 et 6.

Les résultats obtenus par le calcul confirment l'observation du prince de Toscane.

En affirmant que les deux événements A_9 et A_{10} devaient avoir la même probabilité, étant donné qu' « on les obtient chacun de six façons différentes », le prince avait commis l'erreur de s'appuyer sur un modèle où les événements élémentaires[7] ne sont PAS équiprobables :
Ainsi p.ex. la somme $1+3+6$ correspond aux issues

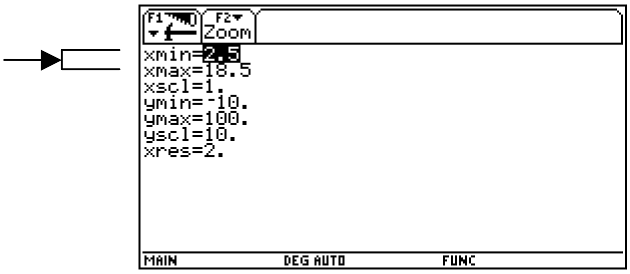
$$(1,3,6),(1,6,3),(3,1,6),(3,6,1),(6,1,3),(6,3,1)$$

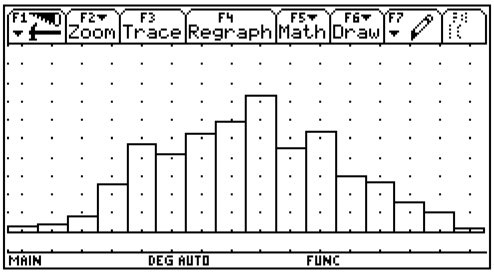
et sortira donc 6 fois plus souvent que la somme $3+3+3$ qui ne correspond qu'à l'unique issue $(3,3,3)$.

[7] à savoir des listes non ordonnées, avec répétition, de 3 entiers compris entre 1 et 6

Remarques :

1) Il est possible de représenter les fréquences absolues de toutes les sommes pouvant sortir à l'occasion d'un lancer de 3 dés :



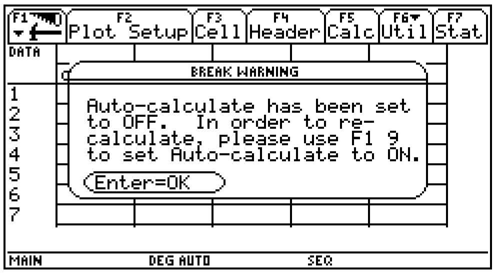


… Trace permet de lire les fréquences absolues des sommes 3, 4, ... 18. On ne peut cependant pas « sauter » immédiatement sur une valeur donnée (9 ou 10 p.ex.), mais, on est obligé de parcourir les valeurs une à une à partir de la valeur 3. Cette opération prend beaucoup de temps. **C'est la raison pour laquelle, dans la partie A, on s'est borné à représenter uniquement les fréquences des sommes 9 et 10**.

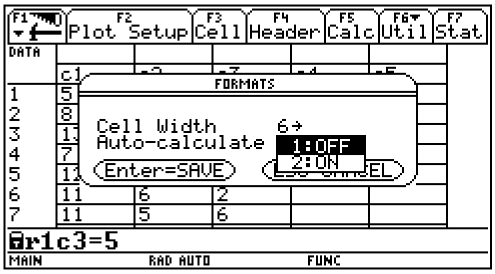
2) Chaque fois qu'on retourne à l'application Data/Matrix Editor ou qu'on apporte une modification au tableau, le tableau est automatiquement et complètement recalculé. Ceci entraîne une perte de temps énervante. Il est donc indiqué de **désactiver provisoirement le « calcul automatique »**.

On peut procéder de deux façons différentes :

- Soit on arrête le calcul du tableau par la touche ´ . Dans ce cas, le message ci-contre est affiché :

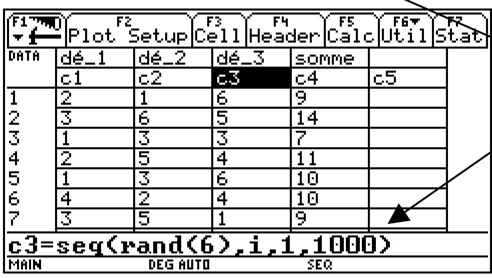


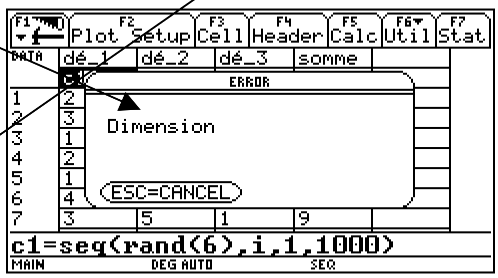
- Soit on accède par F1 9 :Format...(ou plus simplement par ¥ F) à l'écran ci-contre dans lequel on peut activer ou désactiver la calcul automatique. Confirmer par ¸ .



Une fois que le tableau ainsi que le format de la représentation graphique auront été mis au point, on **réactivera** le calcul automatique pour réaliser la simulation.

3) Dans l'application Data/Matrix Editor, les tableaux n'ont que 999 lignes. On peut donc simuler jusqu'à 999 lancers de 3 dés. Si l'on dépasse ce nombre, le message d'erreur suivant s'affiche :

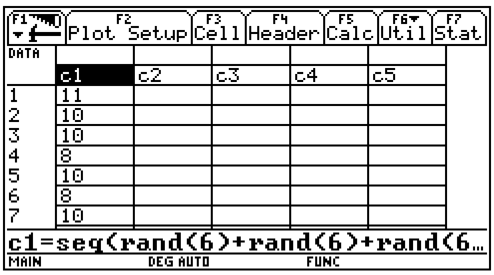


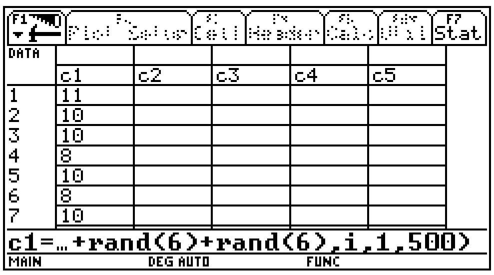


4) Une variante :

On peut simuler 500 lancers de 3 dés en définissant la colonne c1 comme suit : c1=seq(rand(6)+rand(6)+rand(6),i,1,500).

Dans la colonne c1 s'affichera alors, pour chaque lancer, la somme des résultats des 3 dés (les résultats individuels des 3 dés n'apparaissent donc plus).





On n'oubliera pas de préciser que ce seront les valeurs inscrites dans la colonne c1 qui devront être portées en abscisse.