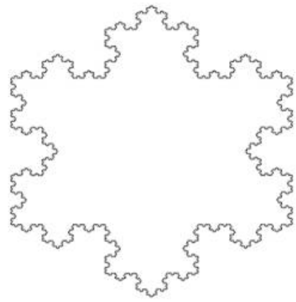
Le flocon de neige de Helge von Koch

Fiche du professeur

Niveau : 3e BCD

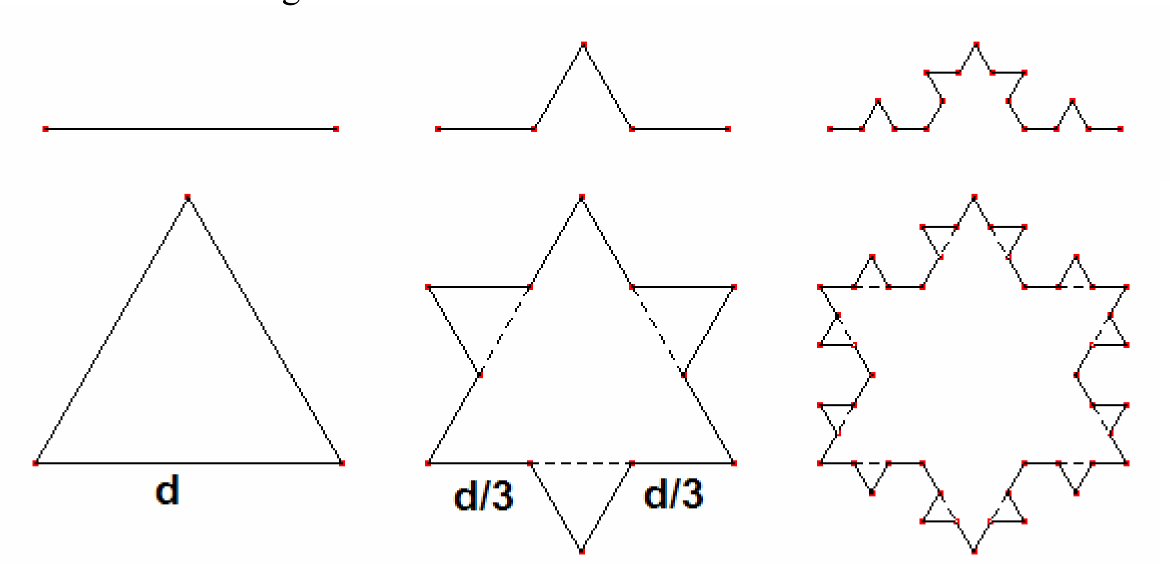
Sujets et objectifs :
- Etude de deux suites géométriques.
- Notion de convergence et de divergence d'une suite

Connaissances préliminaires
- Suites arithmétiques et géométriques
- Notion de limite d'une suite



Enoncé

On considère les figures ci-dessous.



Etape 0 Etape 1 Etape 2

A chaque étape de la construction on remplace chaque segment par quatre segments dont la longueur vaut $\frac{1}{3}$ de celui qu'on remplace comme indiquée sur les figures.

a) Soient s_n le nombre de segments à l'étape n,
l_n la longueur d'un segment à l'étape n et
p_n la longueur totale du flocon à l'étape n

Exprimer d'abord s_n et l_n en fonction de s_{n-1} et l_{n-1} puis en fonction de n et en déduire p_n en fonction de n pour tout $n \geq 0$.

b) Exprimer l'aire d'un triangle équilatéral en fonction de la longueur d'un côté.
c) Soit a_n l'aire du flocon à l'étape *n*,
   Exprimer a_n en fonction de *n* pour tout $n \geq 0$.
d) Représenter graphiquement les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
e) Démontrer que les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement croissantes.

Dans la suite, on suppose que $d = 1$.

e) Existe-t-il un nombre entier n tel que $p_n \geq 10^6$? $p_n \geq 10^9$? $p_n \geq 10^{12}$?
   Justifier la réponse.
   Quelle semble être la limite de p_n quand *n* tend vers l'infini ?
f) Calculer a_{10} , a_{20} et a_{30}.
   Quelle semble être la limite de a_n quand *n* tend vers l'infini ? Démontrer.

Réponse

a) $s_0 = 3$; $s_1 = 4s_0 = 4\cdot 3$; $s_2 = 4s_1 = 4^2\cdot 3$; $s_n = 4s_{n-1} = 3\cdot 4^n$

$l_0 = d$; $l_1 = \frac{l_0}{3} = \frac{d}{3}$; $l_2 = \frac{l_1}{3} = \frac{d}{3^2}$; $l_n = \frac{l_{n-1}}{3} = \frac{d}{3^n}$

$p_n = s_n \cdot l_n = 3\cdot 4^n \cdot \left(\frac{d}{3}\right)^n = 3d\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$

A l'aide d'un tableau :

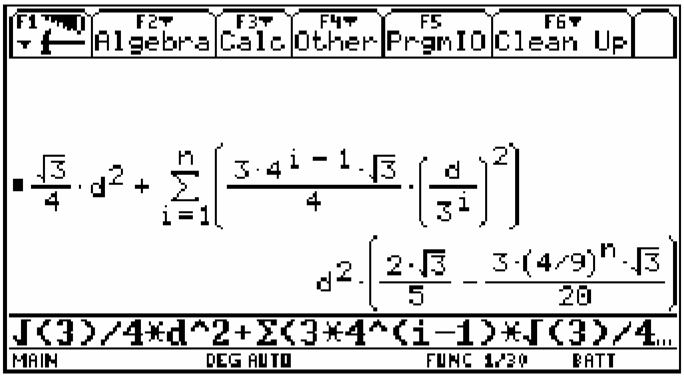
Etape	0	1	2	3	n
Nombre de segments s_n	3	12	48	192	$3\cdot 4^n$
Longueur d'un segment l_n	d	$\frac{d}{3}$	$\frac{d}{9}$	$\frac{d}{27}$	$\frac{d}{3^n}$
Périmètre du flocon p_n	$3d$	$12\cdot\frac{d}{3} = 4d$	$\frac{48}{9}d$	$\frac{192}{27}d$	$p_n = 3d\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$

b) Aire d'un triangle équilatéral en fonction de la longueur d'un côté : $A = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$

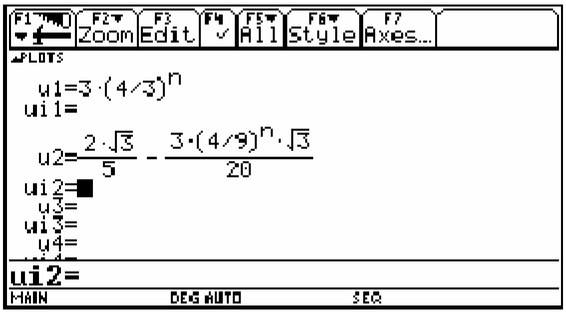
c) A l'aide d'un tableau :

Etape	0	1	2	3	n
Nombre de triangles **supplémentaires**	1	3	12	48	$3\cdot 4^{n-1}\ (n \geq 1)$
Longueur d'un segment	d	$\frac{d}{3}$	$\frac{d}{9}$	$\frac{d}{27}$	$\frac{d}{3^n}$
Somme des aires des triangles **supplémentaires** b_n	$\frac{\sqrt{3}}{4}d^2$	$3\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{d}{3}\right)^2$	$12\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{d}{9}\right)^2$	$48\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{d}{27}\right)^2$	$3\cdot 4^{n-1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{d}{3^n}\right)^2$
Aire du flocon a_n	$\frac{\sqrt{3}}{4}d^2$	$a_1 = a_0 + b_1$	$a_2 = a_1 + b_2$	$a_3 = a_2 + b_3$	$a_n = a_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i$

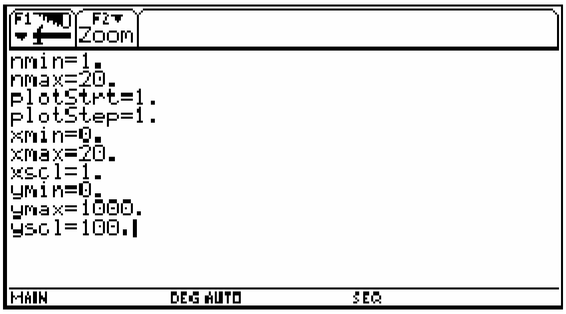
$$a_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} d^2 \ ; \ a_n = \frac{\sqrt{3}}{4} d^2 + \sum_{i=1}^{n} 3 \cdot 4^{i-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{d}{3^i} \right)^2 = d^2 \left(\frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3 \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^n \sqrt{3}}{20} \right)$$

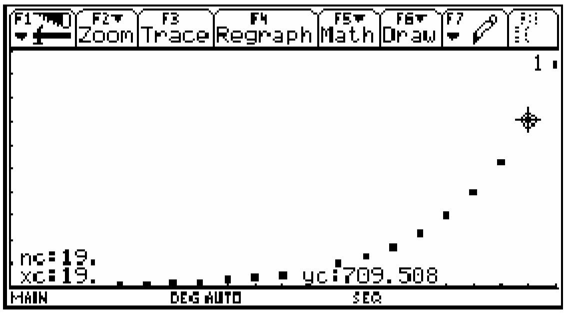


d) On définit d'abord les deux suites par mode explicite dans l'éditeur Y= :

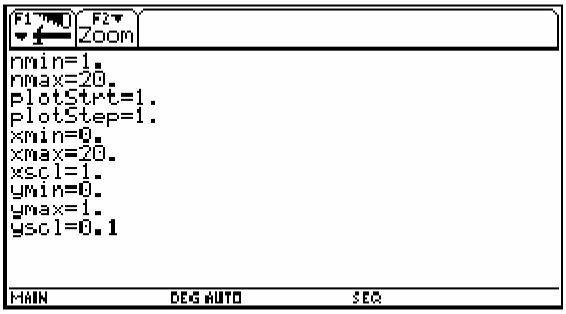


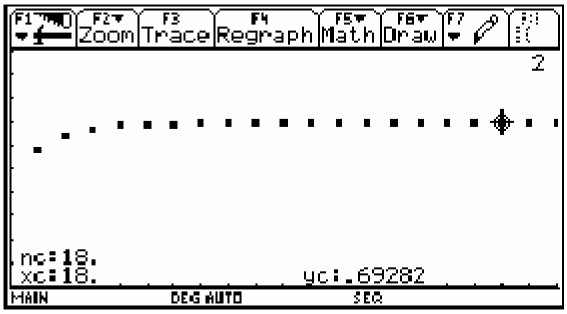
Représentation graphique de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$





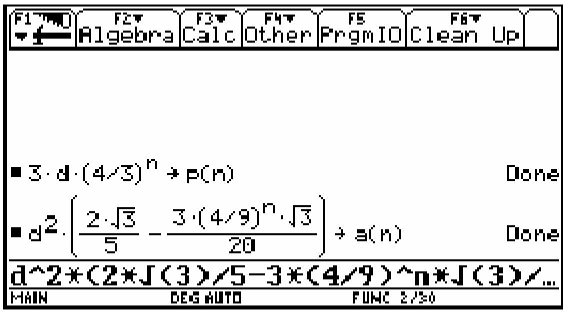
Représentation graphique de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

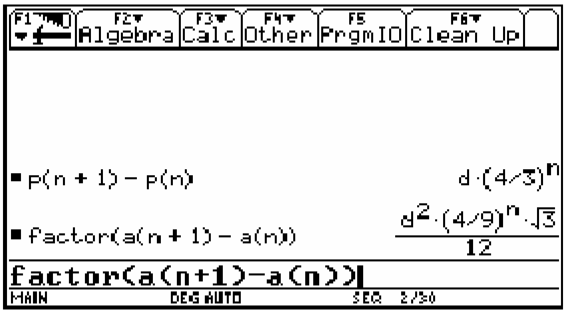

F2 Zoom
nmin=1.
nmax=20.
plotStrt=1.
plotStep=1.
xmin=0.
xmax=20.
xscl=1.
ymin=0.
ymax=1.
yscl=0.1
MAIN DEG AUTO SEQ


F2 Zoom F3 Trace F4 Regraph F5 Math F6 Draw F7
2
nc:18.
xc:18. yc:.69282
MAIN DEG AUTO SEQ

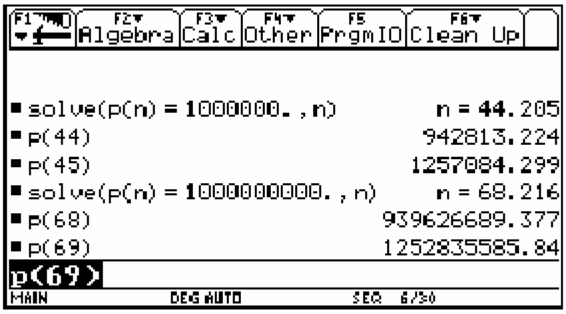
e) $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) : p_{n+1} - p_n = d \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n > 0 \Rightarrow \left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow$

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) : a_{n+1} - a_n = \frac{d^2 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n \cdot \sqrt{3}}{12} > 0 \Rightarrow \left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow$$





d) <u>A l'aide de la V200</u>



$n \geq 45 \Rightarrow p_n > 10^6$; $n \geq 69 \Rightarrow p_n > 10^9$; $n \geq 93 \Rightarrow p_n > 10^{12}$

Il semble que : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$

Définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$

$\left(\forall N > 0\right)\left(\exists n_0\left(N\right) \in \mathbb{N}\right)\left(\forall n \geq n_0\right) : p_n > N$

e) $a_{10} = 0,69274219143...$; $a_{20} = 0,69282029953...$; $a_{30} = 0,69282032302...$;

Il semble que : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0,6928...$

<u>Démonstration :</u>

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2\sqrt{3}}{5} - \underbrace{\frac{3\cdot\overbrace{\left(\frac{4}{9}\right)^n}^{\to 0}\cdot\sqrt{3}}{20}}_{\to 0}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5} = 0,69282032302...$$