Le plan épargne de Julius

Fiche du professeur

Niveau : 3e BCD
Sujets et objectifs :
- Etude de deux suites arithmético-géométriques.
- Définir une suite arithmético-géométrique par mode explicite.
- Résolution graphique d'une équation

Connaissances préliminaires
- Suites arithmétiques et géométriques

Enoncé

Ne pouvant plus résister aux pressions publicitaires, Julius décide d'épargner chaque mois 200€ pendant 20 ans afin de bénéficier d'une rente supplémentaire. Son banquier lui propose les deux formules suivantes :
1°) Rentasafe : versement initial 1000€ ; intérêt mensuel : 0,5%
2°) Rentamax : versement initial 100€ ; intérêt mensuel : 0,8%.

a) Soit u_n la somme d'argent acquise après n versements de 200€ à l'aide de la formule Rentasafe et v_n la somme d'argent acquise après n versements de 200€ à l'aide de la formule Rentamax. Exprimer u_n et v_n à l'aide de n (en mode explicite) et en déduire la formule la plus avantageuse.
Exemple de calcul :
Rentasafe :
Au début : 1000€
Après 1 mois : 1000€ + 0,5% de 1000€ + 200€ = 1205€
Après 2 mois: 1205€ + 0,5% de 1205€ + 200€ = 1411,025 $\approx 1411{,}03$€
…
b) On suppose que Julius verse les 200€ sur le compte d'une des deux formules.
Après combien de mois la formule Rentamax devient-elle plus intéressante ?

Pour chercher

« C'est décidé ! » s'écrie Julius, « je vais choisir la formule Rentamax. ».
« Attention. » lui répond le banquier « le plan Rentamax comporte beaucoup plus de risques, il vaut mieux répartir les 200€ sur les deux formules afin de réduire le risque. »

c) Comment, Julius doit-il répartir les 200€ sur les deux formules afin d'être sûr d'avoir 85000€ après 20 ans. On suppose qu'il peut perdre toute la somme versée sur le compte de la formule Rentamax et que la formule Rentasafe est sûre à 100%.
d) Comment, Julius doit-il répartir les 200€ sur les deux formules afin d'avoir 110000€ au bout de 20 ans. On suppose maintenant qu'il ne perd pas d'argent.

Réponse

a) $\begin{cases} u_0 = 1000 \\ u_{n+1} = 1{,}005 \cdot u_n + 200 \end{cases}$

$u_0 = 1000$

$u_1 = 1000 + 0{,}5\%\, de 1000 + 200 = 1{,}005 \cdot 1000 + 200$

$u_2 = (1{,}005 \cdot 1000 + 200) \cdot 1{,}005 + 200 = 1000 \cdot 1{,}005^2 + 200 \cdot 1{,}005 + 200$

$u_3 = 1000 \cdot 1{,}005^3 + 200 \cdot 1{,}005^2 + 200 \cdot 1{,}005 + 200$

$\ldots$

$$u_n = 1000 \cdot 1{,}005^n + 200 \cdot \left(1 + 1{,}005 + 1{,}005^2 + \ldots + 1{,}005^{n-1}\right)$$
$$= 1000 \cdot 1{,}005^n + 200 \cdot \frac{1{,}005^n - 1}{1{,}005 - 1}$$
$$= 1000 \cdot 1{,}005^n + 40000 \cdot \left(1{,}005^n - 1\right)$$
$$= 41000 \cdot 1{,}005^n - 40000$$

de même :

$\begin{cases} v_0 = 100 \\ v_{n+1} = 1{,}008 \cdot v_n + 200 \end{cases}$

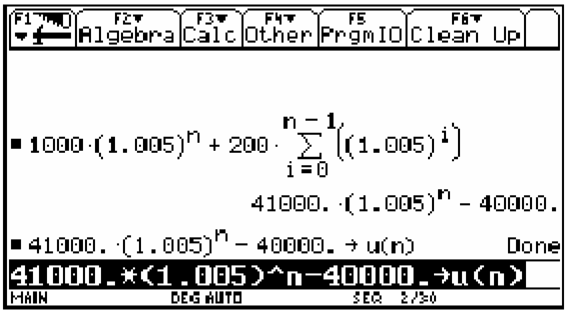
$v_n = 25100 \cdot 1{,}008^n - 25000$

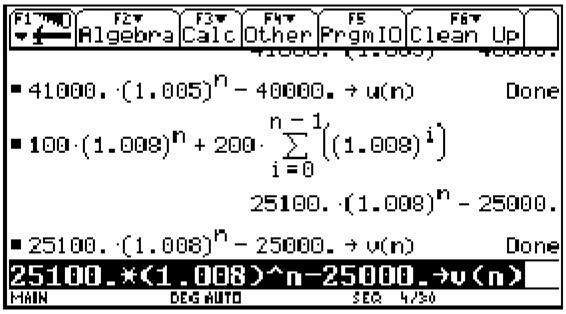
Au bout de 20 ans

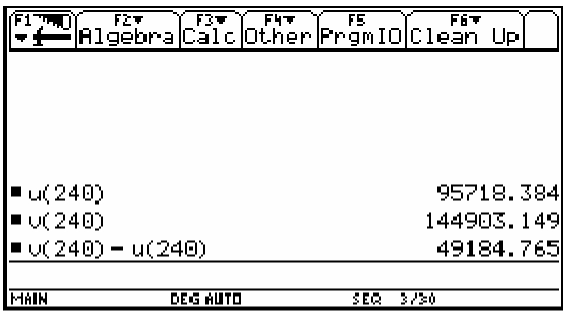
$u_{240} = 41000 \cdot 1{,}005^{240} - 40000 \approx 95718{,}38€$

$v_{240} = 25100 \cdot 1{,}008^{240} - 25000 \approx 144903{,}15€$

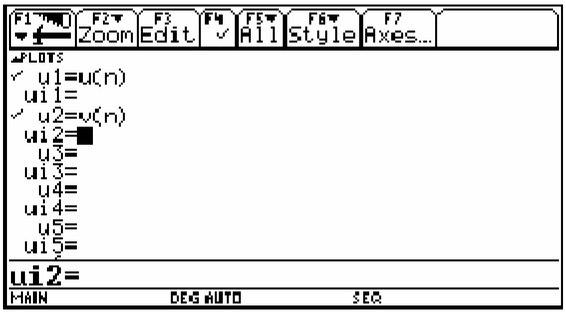
La formule Rentamax est plus avantageuse.

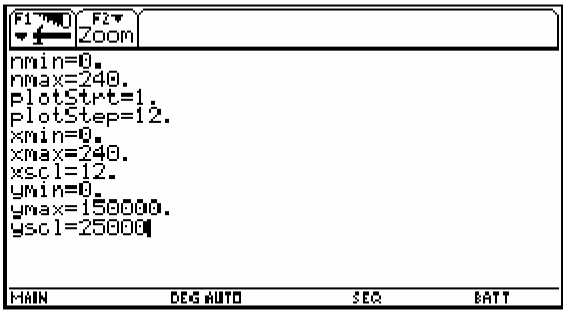


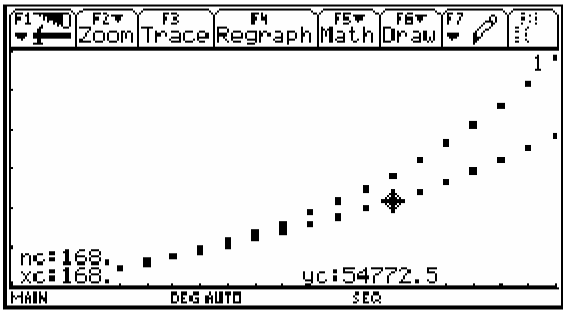


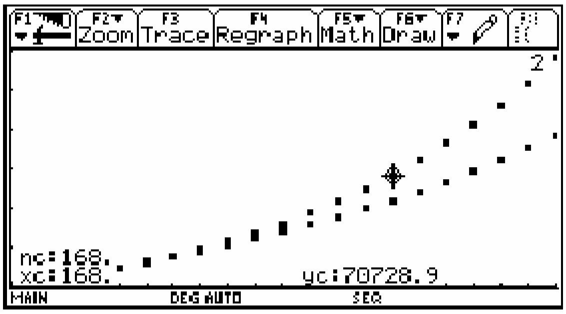


b) Représentation graphique des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



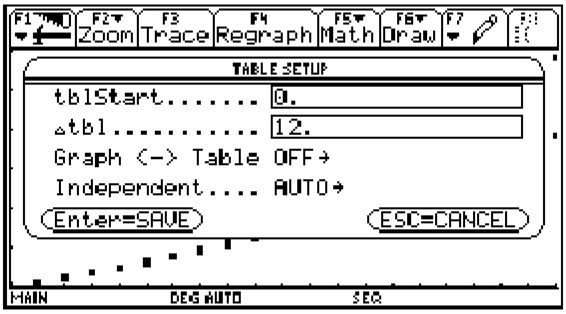


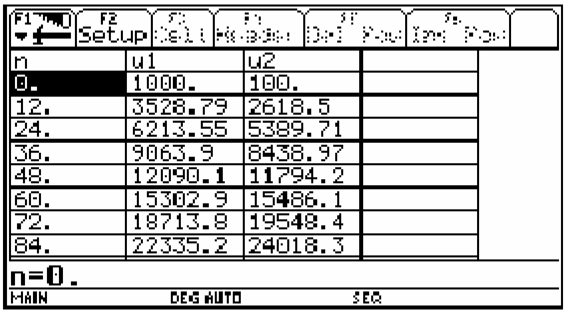




La V200 met un certain temps pour afficher les points sur le graphique. Pour augmenter la vitesse on a déjà choisi un pas de 12. Sur le graphique, on voit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît plus vite que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang.

<u>Tableau de valeurs</u>

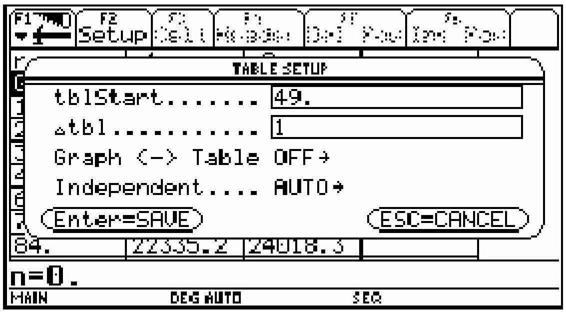


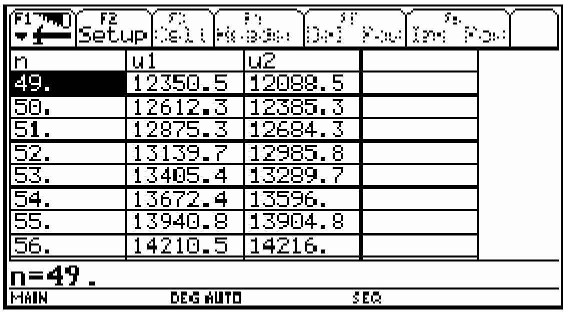


n	u1	u2
0.	1000.	100.
12.	3528.79	2618.5
24.	6213.55	5389.71
36.	9063.9	8438.97
48.	12090.1	11794.2
60.	15302.9	15486.1
72.	18713.8	19548.4
84.	22335.2	24018.3

n=0.

D'après le tableau, il semble que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'emporte sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour un certain $n_0 \in \{49;50;51;52;53;54;55;56;57;58;59\}$. Un deuxième tableau permet d'obtenir plus de précision.





n	u1	u2
49.	12350.5	12088.5
50.	12612.3	12385.3
51.	12875.3	12684.3
52.	13139.7	12985.8
53.	13405.4	13289.7
54.	13672.4	13596.
55.	13940.8	13904.8
56.	14210.5	14216.

n=49.

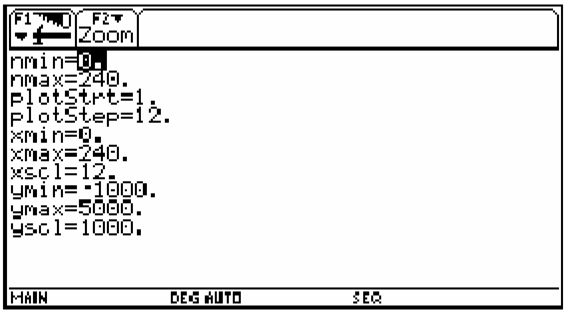
On observe que $v_n > u_n$ si $n > 55$.

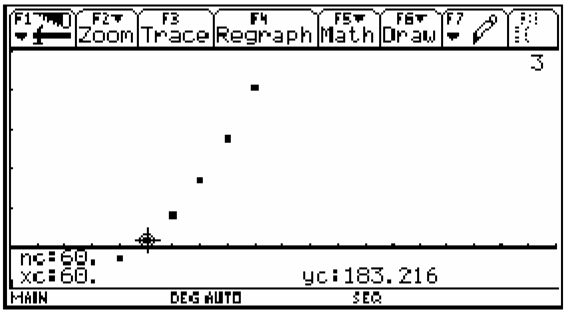
Considérons la suite $\left(w_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$w_n = v_n - u_n = 25100 \cdot 1{,}008^n - 41000 \cdot 1{,}005^n + 15000$

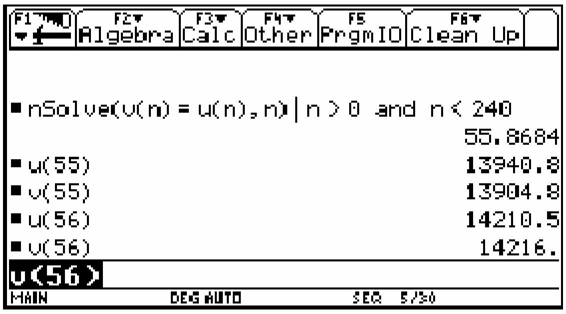
Représentation graphique de la suite $\left(w_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

L'observation graphique suggère à nouveau que $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ l'emporte sur $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour un certain $n_0 \in \{49;50;51;52;53;54;55;56;57;58;59\}$.





On peut également déterminer n_0 à partir d'un calcul :



c) Posons : $f(m) = 1000 \cdot 1{,}005^{240} + m \dfrac{1{,}005^{240} - 1}{1{,}005 - 1}$

Julius est sûr d'avoir 85000€ si $f(m) = 85000$

En résolvant l'équation $f(m) = 85000$ on obtient : $m = 176{,}80$€

d) Soit m $(0 \le m \le 200)$ la somme versée sur le compte de la formule Rentasafe, alors $200 - m$ est la somme versée sur le compte de la formule Rentamax.

Posons : $g(m) = 1000 \cdot 1{,}005^{240} + m \cdot \dfrac{1{,}005^{240} - 1}{1{,}005 - 1} + 100 \cdot 1{,}008^{240} + (200 - m) \cdot \dfrac{1{,}008^{240} - 1}{1{,}008 - 1}$

Alors Julius aura 110000€ après 240 mois si $g(m) = 110000$.

En résolvant l'équation $g(m) = 110000$ on obtient : $m = 147{,}49$€ et $200 - m = 52{,}51$€