Anna et les cubes Lego

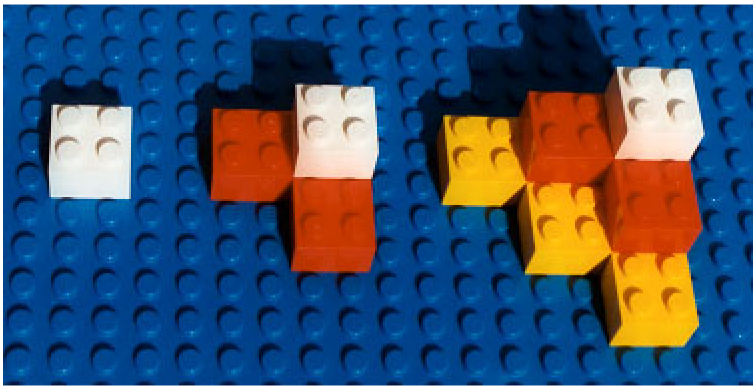
Fiche du professeur

Niveau : 3e BCD
Sujets et objectifs : suites, somme des termes d'une suite quelconque, somme des n premiers nombres entiers, notion de limite d'une suite.
Connaissances préliminaires : notion de suites, suites arithmétiques, résolution d'équations à l'aide de la V200.

Enoncé

Anna construit deux types de pyramides avec des cubes Lego comme indiqué sur les figures ci-dessous.

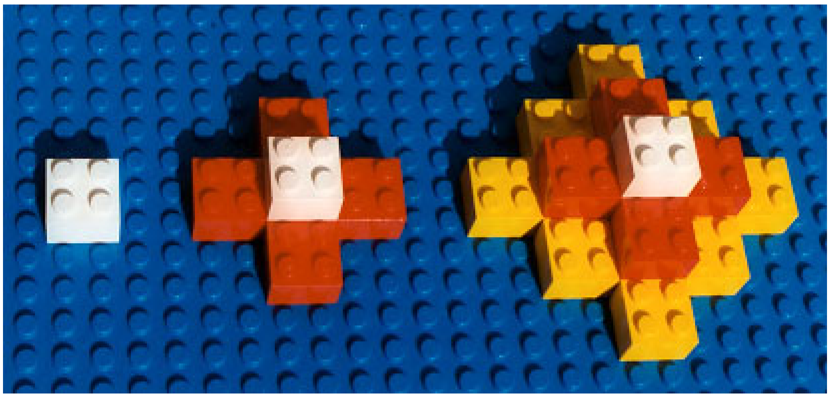
Pyramide de type 1



On appelle hauteur d'une pyramide le nombre des étages de cubes superposés. Sur la photo, on voit à gauche une pyramide de hauteur 1 , au milieu une pyramide de hauteur 2 et à droite une pyramide de hauteur 3.
On note
u_n le nombre de cubes de la base d'une pyramide de type 1 de hauteur n.
s_n le « volume » , c.-à-d. le nombre total de cubes, d'une pyramide de type 1 de hauteur n.

a) Exprimer u_n et s_n en fonction de n.
b) Combien faut-il de cubes Lego pour construire une pyramide de type 1 de hauteur 100 ?

Pyramide de type 2



On note

v_n le nombre de cubes de la base d'une pyramide de type 2 de hauteur n.

t_n le « volume » , c.-à-d. le nombre total de cubes, d'une pyramide de type 2 de hauteur n.

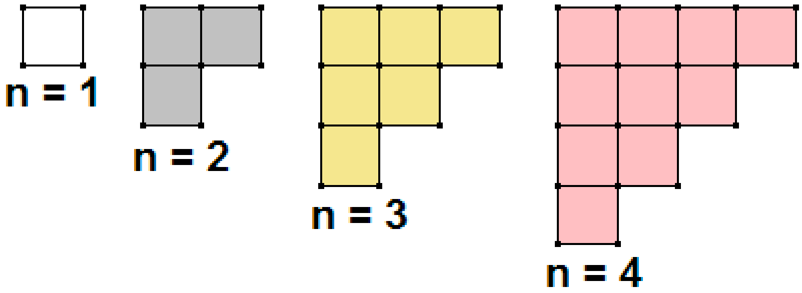
c) Exprimer v_n et t_n en fonction de n.

d) Quelle est la hauteur d'une pyramide de type 2 qu'on peut construire avec 1000000 de cubes Lego ?

e) Déterminer la limite du quotient $\frac{t_n}{s_n}$ si $n \to +\infty$? Démontrer.

<u>Réponse</u>

a) Plans horizontaux (Grundrisse)



n	u_n	s_n
1	1	1
2	3 = 1 +2	4 = 1 + 3
3	6 = 3 + 3 = 1 + 2 + 3	10 = 1 + 3 + 6
4	10 = 6 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4	20 = 1 + 3 + 6 + 10
5	15 = 10 + 5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5	35 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15

Définition de u_n par mode récurrent :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + n \text{ , si } n > 1 \end{cases}$$

Définition de u_n par mode explicite :

$$u_n = u_{n-1} + n = u_{n-2} + (n-1) + n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

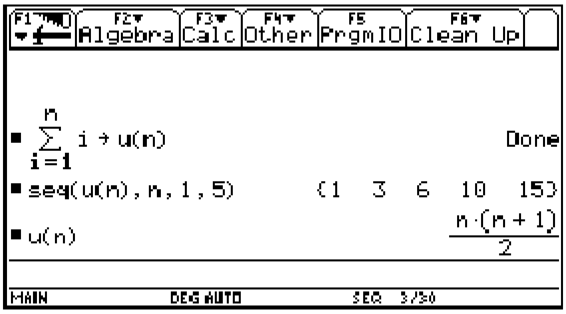
Définition de s_n par mode explicite :

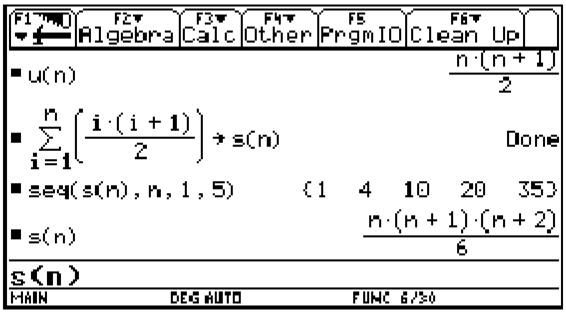
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

b) Nombre de cubes pour construire une pyramide de type 1 et de hauteur 100:

$$s_{100} = \frac{100 \cdot 101 \cdot 102}{6} = 171700.$$

<u>A l'aide de la V200</u>





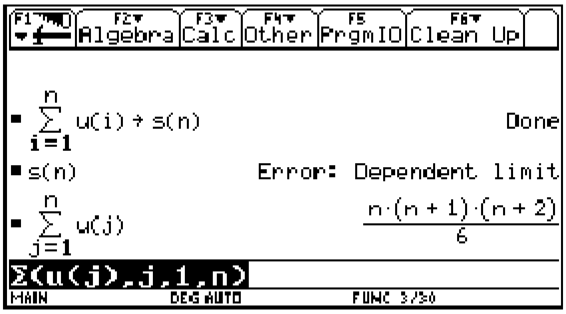
$seq\left(u(n),n,1,5\right) = \{1\ 3\ 6\ 10\ 15\}$ permet de vérifier la formule pour les 5 premiers termes

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} \rightarrow s_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Pour exprimer s_n en fonction de *n* il est préférable d'utiliser le mode explicite de u_n (cf. remarque ci-dessous).

$seq\left(s(n),n,1,5\right) = \{1\ 4\ 10\ 20\ 35\}$ permet de vérifier la formule pour les 5 premiers termes

<u>Remarque</u>



Etant donné qu'on a défini $u(n)$ et $s(n)$ comme sommes de termes dépendant d'une même variable ***i***, à savoir $u(n) = \sum_{i=1}^{n} i$ et $s(n) = \sum_{i=1}^{n} u(i)$, la V200, appelée à évaluer $s(n)$, est amenée à calculer la somme double que voici :

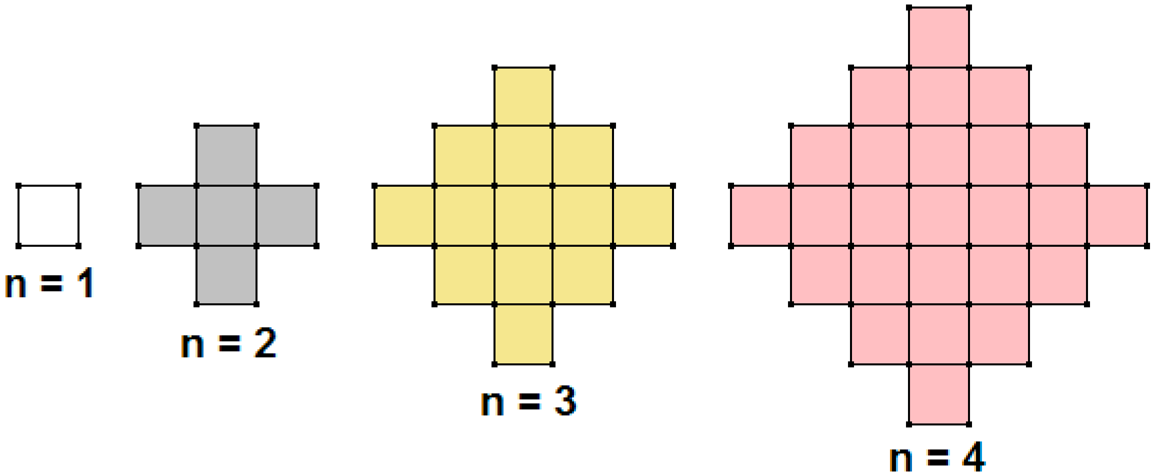
$s(n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{i} i \right)$. Or, dans $\sum_{i=1}^{i} i$, le nom de la variable est égal à la valeur de la borne supérieure de la somme. La V200 affiche le message d'erreur « Dependent limit » (limit = borne). Il en sera de même pour le calcul des

intégrales. La V200, appelée à calculer $\int_a^x f(x)\,dx$, affichera le même message d'erreur, étant donné qu'on vient de choisir un même nom x pour la variable muette et pour une des bornes d'intégration.
Pour éviter de pareils problèmes, il est donc recommandé de ne jamais utiliser dans un même exercice un même nom pour les différentes variables dans les diverses sommes.
Solution du problème :

$$s(n)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} i\right)=\sum_{j=1}^{n} u_j=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Mieux encore : Eviter les sommes doubles en III$^{\text{ième}}$!

c) Plans horizontaux (Grundrisse)



n	v_n	t_n
1	1	1
2	$5=1+4\cdot 1$	6 = 1 + 5
3	$13=5+4\cdot 2=1+4\cdot 1+4\cdot 2$	19 = 1 + 5 + 13
4	$25=13+4\cdot 3=1+4\cdot 1+4\cdot 2+4\cdot 3$	44 = 1 + 5 + 13 + 25
5	$41=25+4\cdot 4=1+4\cdot 1+4\cdot 2+4\cdot 3+4\cdot 4$	85 = 1 + 5 + 13 + 25 + 41

Définition de v_n par mode récurrent : $\begin{cases} v_1=1 \\ v_n=v_{n-1}+4\cdot(n-1)\ ,\ \text{si}\ \ n>1 \end{cases}$

Définition de v_n par mode explicite :

$$v_n=1+4\cdot 1+4\cdot 2+\ldots+4\cdot(n-1)=1+4\cdot(1+2+\ldots n-1)=2n(n-1)+1$$

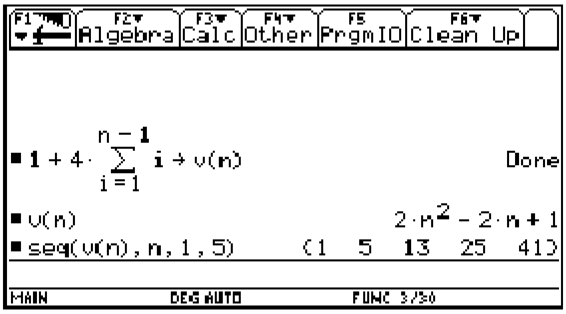
Définition de t_n par mode explicite :

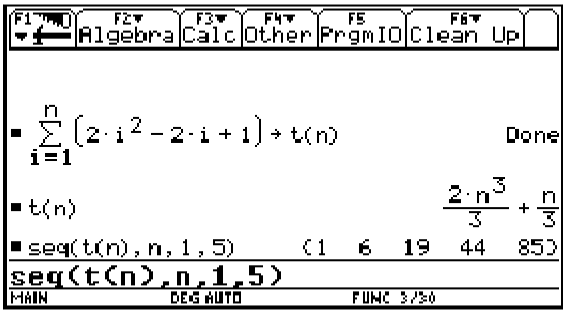
$$t_n=\sum_{i=1}^{n} v_i=\sum_{i=1}^{n}\left(2i^2-2i+1\right)=\frac{n\left(2n^2+1\right)}{3}$$

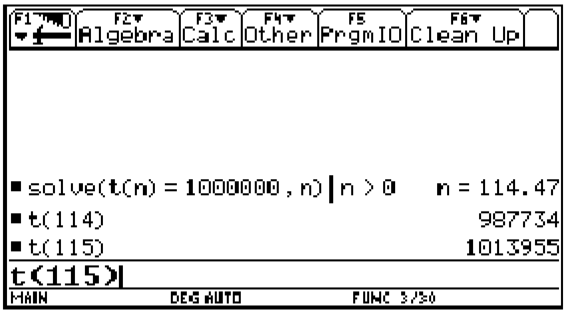
d) Hauteur d’une pyramide de type 2 qu’on peut construire avec 1000000 cubes : $t_n = 1000000 \Leftrightarrow n = 114,4...$; $t_{114} = 987734$; $t_{115} = 1013955$.

Avec 1000000 on peut construire une pyramide de type 2 dont la hauteur vaut 114.

<u>A l’aide de la V200</u>

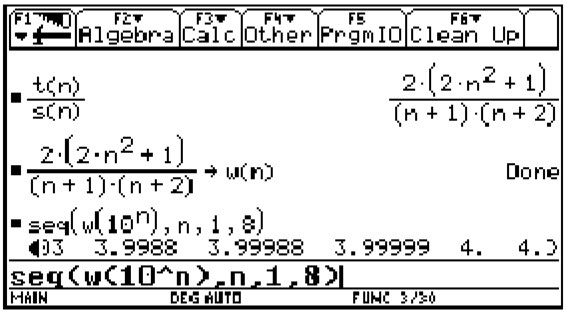






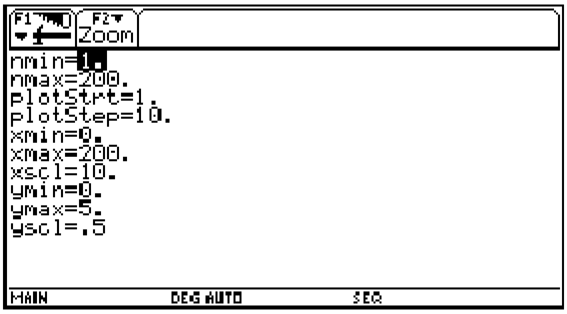
e) Posons : $w_n = \dfrac{t_n}{s_n} = \dfrac{2\left(2n^2+1\right)}{(n+1)(n+2)}$

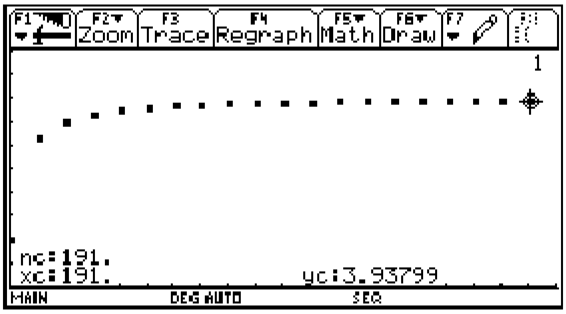
<u>A l’aide la V200</u>



La suite de terme général $a_n = \dfrac{2\left(2\cdot\left(10^n\right)^2+1\right)}{\left(10^n+1\right)\left(10^n+2\right)}$ semble converger vers 4.

A l'aide d'une représentation graphique de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.





Il semble que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 4$

Démonstration

$$\lim_{n\to+\infty}(w_n-4)=\lim_{n\to+\infty}\frac{-12n-6}{n^2+3n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-12-\frac{6}{n}}{n+3+\frac{2}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\overbrace{-12\cdot\left(1+\frac{1}{2n}\right)}^{\to-12}}{\underbrace{n\cdot\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}_{\to+\infty}}=0$$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 4$

A l'aide de la V200