Simplification d'expressions contenant des valeurs absolues & applications

Rappel : Définition de la valeur absolue :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Donc par exemple : $\left|3\right| = \left|-3\right| = 3$.

Propriété : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |x| \geq 0$

Formules :

a) $\left|a \cdot b\right| = \left|a\right| \cdot \left|b\right|$

b) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{\left|a\right|}{\left|b\right|}$

c) Attention : $\left|a+b\right| \leq \left|a\right| + \left|b\right|$ (***inégalité triangulaire***)

P. ex. : $3 = \left|-5+8\right| < \left|-5\right| + \left|8\right| = 13$

Comment écrire une expression sans valeur absolue ?

a) Expressions contenant *une seule* valeur absolue.

Exemple :

$$|2x-4| = \begin{cases} 2x-4 & \text{si } 2x-4 \geq 0 \text{ c.-à.d. si } x \geq 2 \\ -2x+4 & \text{si } 2x-4 \leq 0 \text{ c.-à.d. si } x \leq 2 \end{cases}$$

Il est pratique de faire la simplification dans un tableau :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2x-4$	$-$	0	$+$
$\|2x-4\|$	$-2x+4$	0	$2x-4$

On écrit l'***opposé*** de l'expression entre $|\ |$ là où elle est $-$.

On écrit l'expression entre $|\ |$ là où elle est $+$.

La ligne dans le tableau qui contient le signe de $2x-4$ est en fait ***superflue*** d'après la :

Règle du signe d'un binôme $ax+b$ du 1^{er} degré $(a \neq 0)$:
Le signe de a se trouve toujours à droite.

Dans la suite, on fera donc directement le tableau de simplification suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$\lvert 2x-4 \rvert$	$-2x+4$	0	$2x-4$

De même, ***par exemple*** pour simplifier $\lvert 3-x \rvert$, on obtient :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$\lvert 3-x \rvert$	$3-x$	0	$x-3$

Rappelons également la :

Règle du signe d'un trinôme ax^2+bx+c du 2^{e} degré $(a \neq 0)$:
Le signe de a est partout, sauf entre les racines.

Donc, ***par exemple***, pour simplifier $\lvert x^2-6x-7 \rvert$, on détermine d'abord les racines du trinôme, qui sont -1 et 7, puis on obtient le tableau de simplification suivant :

x	$-\infty$	-1		7	$+\infty$
$\lvert x^2-6x-7 \rvert$	x^2-6x-7	0	$-x^2+6x+7$	0	x^2-6x-7

Autre exemple :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$\lvert 4-9x^2 \rvert$	$9x^2-4$	0	$4-9x^2$	0	$9x^2-4$

Exercice 1 Ecrire sans valeur absolue à l'aide d'un tableau les expressions suivantes : a) $\lvert 4-\frac{x}{2} \rvert$ b) $\lvert 3x^2-4x+8 \rvert$ c) $\lvert -2x^2-1 \rvert$ d) $\lvert -5x+\frac{1}{3} \rvert$ e) $\lvert -2x^2+3x+35 \rvert$ f) $\lvert (x+5)^2 \rvert$ g) $\lvert -x^2-2x-1 \rvert$.

b) Expressions contenant *plusieurs* valeurs absolues :

Il faut compter ***une ligne*** pour chaque valeur absolue dans le tableau.

Exemple. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$.:

$$f(x) = |x-2| - 2|3-x|.$$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	0	$x-2$	1	$x-2$
$\lvert 3-x\rvert$	$3-x$	1	$3-x$	0	$x-3$
$f(x)$	$-x+2$ $-2(3-x)$ $=x-4$	-2	$x-2$ $-2(3-x)$ $=-8+3x$	1	$x-2$ $-2(x-3)$ $=-x+4$

Remarque : Les valeurs 2 et 3 de la 1re ligne du tableau sont parfois appelées ***valeurs critiques*** de $f(x)$. En effet, pour ces valeurs-là, l'une ou l'autre valeur absolue change d'expression et donc aussi $f(x)$.

Exercice 2 Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 7$ pour l'exemple ci-dessus.

Exercice 3 Ecrire sans valeur absolue à l'aide d'un tableau les fonctions suivantes :

a) $g(x) = |x-1| + |3-2x|$

b) $h(x) = |x^2-1| - 3 \cdot |x^2+2x-15|$

c) $k(x) = \dfrac{|x|-2}{|x^2-4|}$ (Attention au domaine ici !)

Applications. Les tableaux de simplification précédents servent dans beaucoup de situations ou interviennent des valeurs absolues :

- résolution d'équations et d'inéquations,
- représentation graphique de fonctions,
- calcul de limites …

Exercice résolu 4

(1) Quel est le domaine de la fonction

$$g : x \mapsto \frac{x-1}{|2x+1| - 3 \cdot |2-x|} \ ?$$

(2) Ecrire $g(x)$ sans valeur absolue sur son domaine.

(3) Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$, $\lim\limits_{x \to 7} g(x)$ et interpréter graphiquement.

Réponse

(1) C.E. : $|2x+1|-3\cdot|2-x|\neq 0$

$\Leftrightarrow |2x+1|\neq|3\cdot(2-x)|$

$\Leftrightarrow 2x+1\neq 3\cdot(2-x)$ et $2x+1\neq -3\cdot(2-x)$

$\Leftrightarrow 2x+1\neq 6-3x$ et $2x+1\neq -6+3x$

$\Leftrightarrow x\neq 1$ et $x\neq 7$

$\boxed{|a\cdot b|=|a|\cdot|b|}$

$\boxed{|a|=|b| \Leftrightarrow a=b \text{ ou } a=-b}$

Donc : $\mathcal{D}_g=\mathbb{R}\setminus\{1,7\}$.

(2) Simplifions d'abord le dénominateur de $g(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$\lvert 2x+1\rvert$	$-2x-1$	0	$2x+1$		$2x+1$
$\lvert 2-x\rvert$	$2-x$		$2-x$	0	$x-2$
$\lvert 2x+1\rvert$ $-3\cdot\lvert 2-x\rvert$	$-2x-1$ $-3\cdot(2-x)$ $=x-7$	$-\frac{15}{2}$	$2x+1$ $-3\cdot(2-x)$ $=5(x-1)$	5	$2x+1$ $-3\cdot(x-2)$ $=-x+7$

Donc :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1		2		7	$+\infty$
$g(x)$	$\frac{x-1}{x-7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	//	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{x-1}{-x+7}$	//	$\frac{x-1}{-x+7}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{5(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{5}$;

$\lim\limits_{x\to 7^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 7^-}\dfrac{x-1}{-x+7}=\dfrac{6}{0^+}=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to 7^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 7^+}\dfrac{x-1}{-x+7}=\dfrac{6}{0^-}=-\infty$,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x+7$	$+$	0	$-$

$\lim\limits_{x\to 7} g(x)=$ n'existe pas.

Interprétation graphique : La courbe représentative de g admet un trou en $\left(1,\frac{1}{5}\right)$ et une A.V. d'équation $x=7$.

Exercice résolu 5

Soit $f(x)=\dfrac{x^2-|x|}{|x^2-1|}$.

(1) Quel est le domaine de la fonction f ?

(2) Etudier la parité de f.

(3) Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue sur son domaine.

(4) Déterminer $\lim_{x\to1} f(x)$, $\lim_{x\to-1} f(x)$ et interpréter graphiquement.

Réponse

(1) C.E. : $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ et $x \neq -1$.

Donc : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

(2) f est une fonction paire, car :

$$\left(\forall x \in \mathcal{D}_f\right) \quad f(-x) = \frac{(-x)^2 - |-x|}{\left|(-x)^2 - 1\right|} = \frac{x^2 - |x|}{\left|x^2 - 1\right|} = f(x).$$

(3) Les valeurs critiques sont $-1{,}0$ et 1. Comme f est paire, on peut réduire l'étude à $\mathbb{R}_+$. D'où le tableau de simplification :

x	0		1	$+\infty$
$\|x\|$	0	x		x
$\left\|x^2 - 1\right\|$		$1 - x^2$	0	$x^2 - 1$
$f(x)$	0	$\frac{x^2 - x}{1 - x^2} = \frac{x(x-1)}{(1-x)(1+x)} = -\frac{x}{x+1}$	/	$\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1}$

(4) $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\left(-\frac{x}{x+1}\right) = -\frac{1}{2}$,

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$,.

$\longrightarrow$ $\mathcal{C}_f$ admet un « saut » d'amplitude 1 en $x = 1$.

Comme f est paire, on obtient les limites en -1 par symétrie du graphe :

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \frac{1}{2}$,

$\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\frac{1}{2}$,

$\longrightarrow$ $\mathcal{C}_f$ admet un « saut » d'amplitude -1 en $x = -1$.

Remarque. Bien sûr $\lim_{x\to1} f\left(x\right)$ et $\lim_{x\to-1} f\left(x\right)$ n'existent pas.