CHAPITRE 6

Fonctions homographiques

1. Fonctions homographiques

Définition. On appelle ***fonction homographique*** toute fonction du type $f: x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, c et d sont des constantes réelles vérifiant :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \tag{6.1}$$

Remarques.

- Si $c=0$, alors $a \neq 0$ et $d \neq 0$ (sinon l'hypothèse (6.1) ne serait pas vérifée) et : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = \dfrac{a}{d}x + \dfrac{b}{d}$. *f* est donc une ***fonction affine non constante*** dans ce cas.
- L'hypothèse (6.1) assure que *f* ne soit pas une fonction ***constante***. En effet, soit par exemple $f: x \mapsto \dfrac{2x-1}{4x-8}$. Alors le déterminant des coefficients est $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0$ et on a :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{1}{2}\right\}\right)\ f(x) = \frac{2x-1}{2(2x-1)} = \frac{1}{2} = \text{constante}.$$

Exemples de fonctions homographiques.

- $f: x \mapsto 3x-2$ $\quad a=3,\ b=-2,\ c=0,\ d=1$ (fonction affine)
- $g: x \mapsto \dfrac{-x}{4x+1}$ $\quad a=-1,\ b=0,\ c=4,\ d=1$
- $h: x \mapsto \dfrac{3}{5x}$ $\quad a=3,\ b=0,\ c=5,\ d=0$
- $k: x \mapsto \dfrac{3-x}{4+x}$ $\quad a=-1,\ b=3,\ c=1,\ d=4$

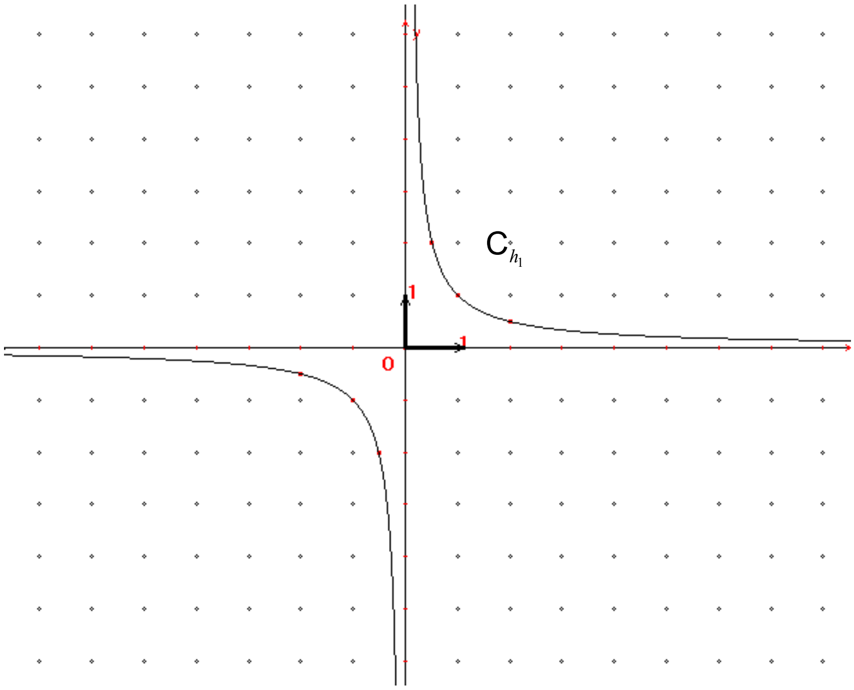
Nous écarterons dans la suite le cas $c=0$ qui correspond aux fonctions affines : ces fonctions ont été étudiées au chapitre 4. La fonction homographique la plus simple (qui n'est pas affine) est :

$$h_1: x \mapsto \frac{1}{x} \quad \text{avec} \quad a=1,\ b=0,\ c=1,\ d=0$$

La représentation graphique de h_1 est l'***hyperbole*** d'équation

$$y = \frac{1}{x}\ .$$

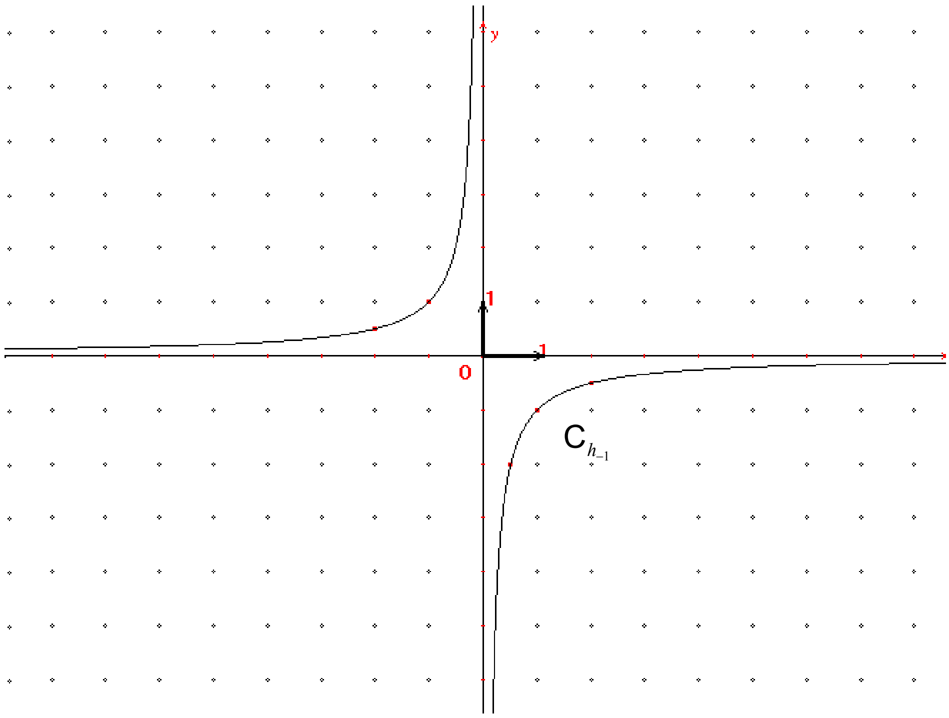
La figure suivante montre la courbe représentative de h_1, tracée dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.



Définition. Une hyperbole est une courbe d'équation $Y = \dfrac{1}{X}$ dans un repère $\left(O, \vec{I}, \vec{J}\right)$ bien choisi du plan cartésien.

2. Etude des fonctions $h_a : x \mapsto \dfrac{a}{x}$ avec $a \neq 0$

- Au paragraphe précédent, on a représenté la fonction $h_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Remarquons que cette fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$.
- La courbe représentative de $h_{-1} : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ s'obtient à partir de celle de h_1 par la symétrie orthogonale d'axe (Ox). Voici la courbe représentative de h_{-1} :



Remarquons que la fonction h_{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$. Généralisons :

***Proposition*.**

- Les courbes $\mathcal{C}_{h_a} : y = -\dfrac{a}{x}$ et $\mathcal{C}_{h_{-a}} : y = -\dfrac{a}{x}$ sont symétriques par rapport à (Ox).
- Si $a > 0$ alors h_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$.
- Si $a < 0$ alors h_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

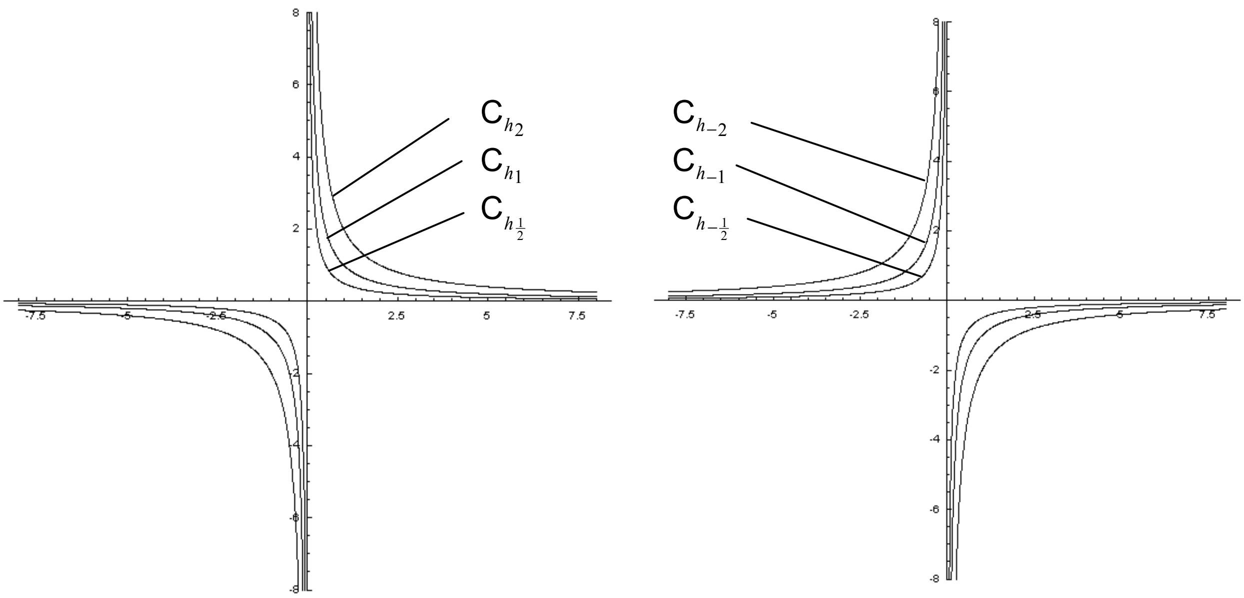
***Démonstration*.** Les deux points $M\left(x, \frac{a}{x}\right)$ et $M'\left(x, -\frac{a}{x}\right)$, appartenant respectivement à $\mathcal{C}_{h_a}$ et $\mathcal{C}_{h_{-a}}$ sont symétriques par rapport à (Ox) puisque leurs ordonnées sont opposées. Donc $\mathcal{C}_{h_a} : y = -\frac{a}{x}$ et $\mathcal{C}_{h_{-a}} : y = -\frac{a}{x}$ sont symétriques par rapport à (Ox).

Etudions maintenant le sens de variation de h_a, $a \neq 0$. Remarquons que h_a est impaire : il suffit donc de calculer le taux de variation de h_a sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
\left(\forall x \neq x' \in \mathsf{R}_+^*\right) \; T_{ha}(x, x') &= \frac{h_a(x') - h_a(x)}{x' - x} \\
&= \frac{\frac{a}{x'} - \frac{a}{x}}{x' - x} \\
&= \frac{a(x - x')}{xx'(x' - x)} \\
&= -\frac{a}{xx'} \quad >0
\end{aligned}$$

- Si $a > 0$ alors ce taux de variation est strictement négatif sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc h_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et par symétrie, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ dans ce cas.
- Si $a < 0$ alors ce taux de variation est strictement positif sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc h_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et par symétrie, strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ dans ce cas.

Voici quelques courbes représentatives de fonctions h_a :



Remarquons que la courbe représentative de h_a est bien une ***hyperbole*** suivant notre définition page 2. En effet, on montre comme au chapitre précédent que C_{h_a} admet comme équation $Y = \frac{1}{X}$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, a\vec{j}\right)$. La petite démonstration de ce fait est laissée comme exercice au lecteur.

3. Etude de quelques fonctions homographiques plus compliquées

a) Etude de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{x-1} + 3$

- Tout d'abord : s'agit-il bien d'une fonction homographique ? Oui, car :

$$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}) \;\; f(x) = \frac{2}{x-1} + 3 = \frac{2 + 3(x-1)}{x-1} = \frac{3x-1}{x-1}.$$

  La définition s'applique avec $a = 3,\ b = -1,\ c = 1,\ d = -1$ et on vérifie que le déterminant des coefficients n'est pas nul !

- Le domaine de *f* est évidemment $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

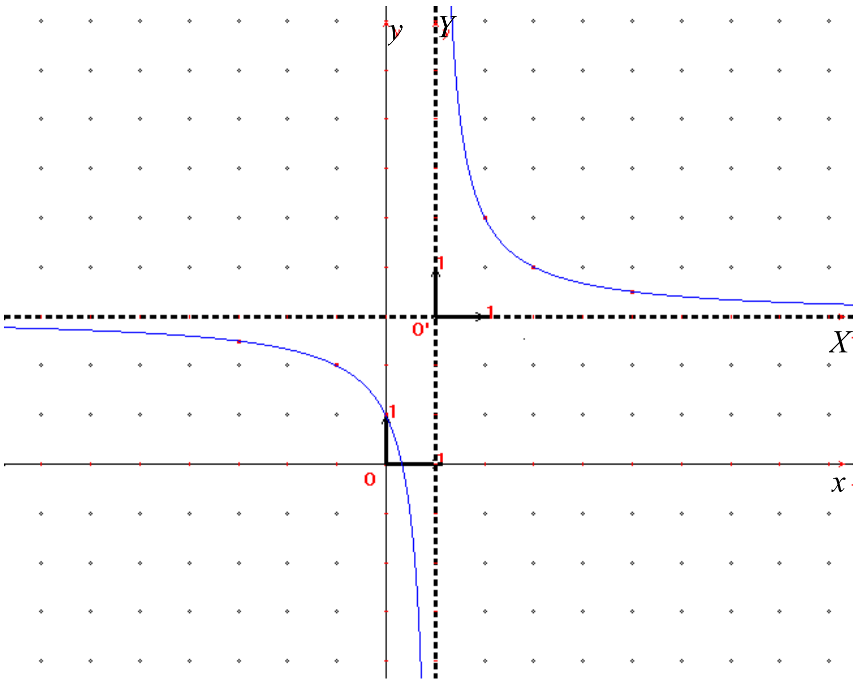
- Pour représenter graphiquement *f*, on utilise la ***méthode du changement de repère***, vue au chapitre précédent :
  - Equation de $\mathcal{C}_f$ dans $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$: $y = \dfrac{2}{x-1} + 3 \Leftrightarrow y - 3 = \dfrac{2}{x-1}$
  - Changement de repère :

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \text{Nouvelle origine : } O'(1,3) \\ \text{Nouveau repère : } \left(O', \vec{i}, \vec{j}\right) \end{array}$$

  - Equation de $\mathcal{C}_f$ dans $\left(O', \vec{i}, \vec{j}\right)$: $Y = \dfrac{2}{X} = h_2(X)$

  Donc : $\mathcal{C}_f$ dans $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right) = \mathsf{C}_{h_2}$ dans $\left(O', \vec{i}, \vec{j}\right)$.

- Nous avons ainsi montré que la courbe représentative de la fonction homographique *f* est une hyperbole. Voici le graphique :



b) Etude de la fonction $g\colon x \mapsto \dfrac{3x-1}{2x-1}$

- Cette fonction est bien homographique. (Justifier !) Remarquons que son domaine est $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

- On ne peut pas tout de suite appliquer la méthode du changement de repère cette fois. D'abord il faut mettre $g(x)$ sous ***forme canonique***. Pour cela, on effectue une division de polynômes :

$$\begin{array}{r|l} 3x-1 & 2x-1 \\ \cline{2-2} -3x+\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \cline{1-1} \text{"} \quad \frac{1}{2} & \end{array}$$

  Par conséquent :

$$\begin{aligned} \left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{1}{2}\right\}\right) \ 3x-1 &= (2x-1)\cdot \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} \quad /\div (2x-1) \\ \Rightarrow \frac{3x-1}{2x-1} &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2(2x-1)} \\ \Rightarrow g(x) &= \frac{3}{2} + \frac{1}{4x-2} \end{aligned}$$

- Dans cette forme canonique, x intervient une seule fois dans l'expression de $g(x)$, à savoir au dénominateur. Ceci permet d'utiliser la méthode du changement de repère :
  - Equation de $\mathcal{C}_g$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$: $y = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{4x-2} \Leftrightarrow y - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)}$

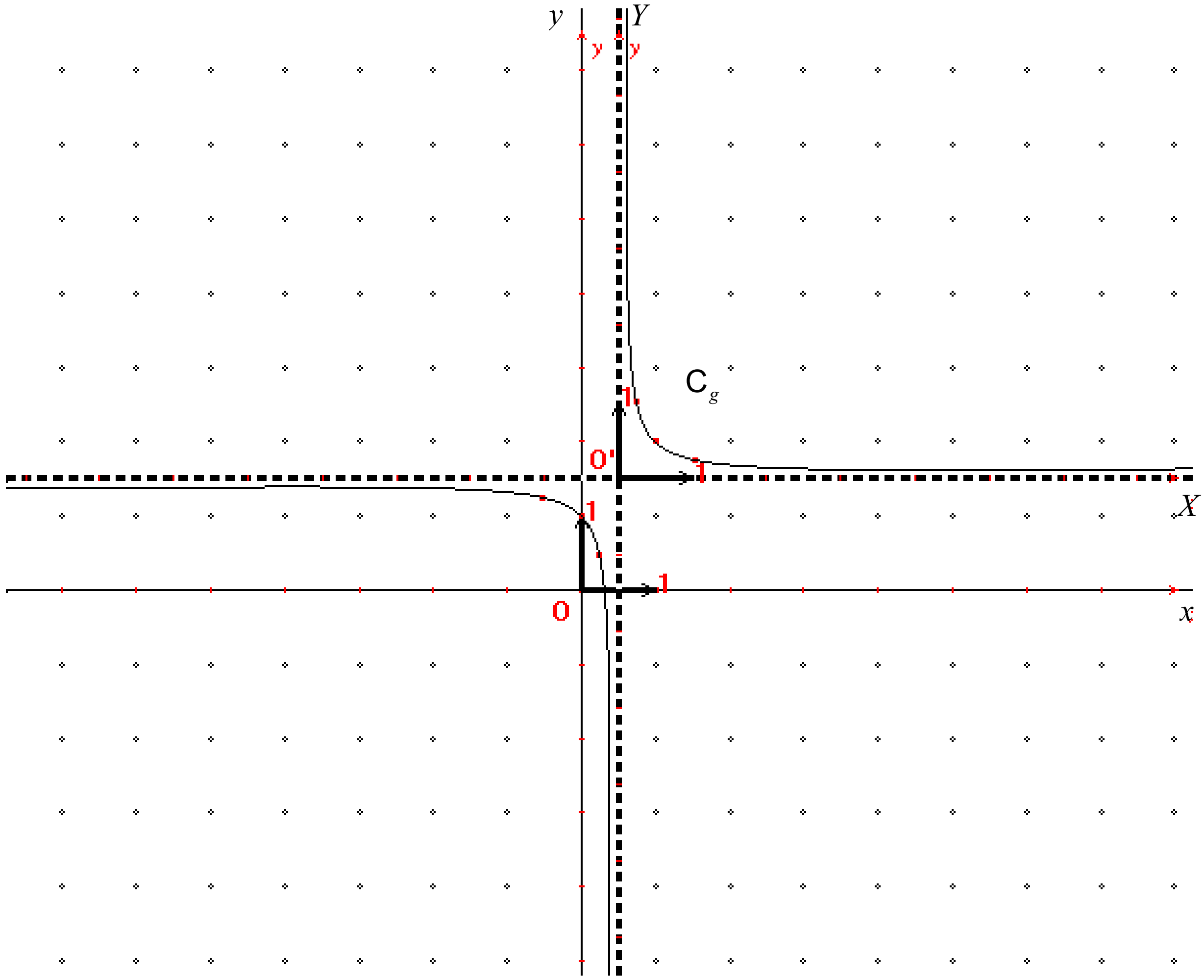
    Attention ! Il faut mettre en évidence le coefficient de x avant de faire le changement de repère ! En effet, si l'on posait $X = 4x-2$, alors le coefficient 4 changerait le vecteur de base $\vec{i}$ dans le nouveau repère. Si l'on veut faire une ***translation*** de repère, il faut que le coefficient de x soit toujours égal à 1.
  - Changement de repère :

    $\begin{cases} X = x - \frac{1}{2} \\ Y = y - \frac{3}{2} \end{cases}$ Nouvelle origine : $O'\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$
 Nouveau repère : $(O',\vec{i},\vec{j})$
  - Equation de $\mathcal{C}_g$ dans $(O',\vec{i},\vec{j})$: $Y = \dfrac{1}{4X} = h_{\frac{1}{4}}(X)$

  Donc : $\mathcal{C}_g$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ = $\mathcal{C}_{h_{\frac{1}{4}}}$ dans $(O',\vec{i},\vec{j})$.

- Nous avons ainsi montré que la courbe représentative de la fonction homographique g est une encore une hyperbole. Le graphique de cette fonction se trouve à la page suivante.

Remarque finale. Nous terminons ce chapitre en observant que la méthode présentée ci-dessus s'applique à toute fonction homographique (non affine) $f\colon x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ telle que $c \neq 0$. Nous comprenons donc que la représentation d'une telle fonction homographique est toujours une ***hyperbole***.



y
Y
x
X
O'
0
1
1
1
1
C_g