

EXERCICES SUR LE CHAPITRE 8

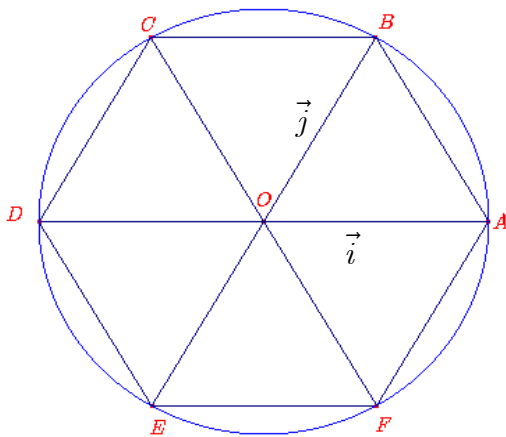
Géométrie analytique plane

Exercice 1

Soit (O, \vec{i}) un repère d'une droite d .

- (1) Placer sur cette droite les points $I(1)$, $A(3)$ et $B(-2)$.
- (2) Déterminer l'abscisse du point C tel que $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.
- (3) Déterminer l'abscisse du point D tel que $\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$.
- (4) Exprimer \overrightarrow{CD} en fonction de \vec{i} .

Exercice 2

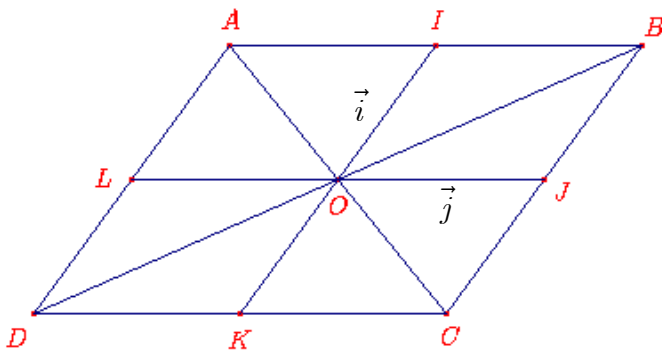


$ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O . On note : $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$.

- (1) Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants dans la base (\vec{i}, \vec{j}) : \overrightarrow{AF} , \overrightarrow{FE} , \overrightarrow{ED} , \overrightarrow{DC} , \overrightarrow{CB} , \overrightarrow{BA} , \overrightarrow{BF} , \overrightarrow{BE} , \overrightarrow{FD} , \overrightarrow{DB} .
- (2) Déterminer les coordonnées des points O , A , B , C , D , E et F dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 3

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O . I , J , K et L sont les milieux des 4 côtés. On note : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.



- (1) Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants dans la base (\vec{i}, \vec{j}) : \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{IJ} , \overrightarrow{LB} , \overrightarrow{LC} , \overrightarrow{BD} , \overrightarrow{JA} , \overrightarrow{JD} , \overrightarrow{JK} .
- (2) Déterminer les coordonnées des points O , A , B , C , D , I , J , K , L
 - a) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) ,
 - b) dans le repère (A, \vec{i}, \vec{j}) et
 - c) dans le repère $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

Exercice 4

Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan, on donne les points $A(1, -2)$, $B(5, 1)$ et $C(-2, 4)$.

- (1) Déterminer par deux méthodes les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un **parallélogramme**.
- (2) Déterminer les coordonnées du point E tel que $ABEC$ soit un **parallélogramme**. (Une seule méthode suffit.)
- (3) Montrer **analytiquement** et **géométriquement** que $C = \text{mil}[DE]$.

$$ABCD \text{ est un parallélogramme} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{DC}$$

ou

$$ABCD \text{ est un parallélogramme} \Leftrightarrow \text{mil}[AC] = \text{mil}[BD]$$

Exercice 5

Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère cartésien du plan. On donne les trois vecteurs suivants dans la base (\vec{i}, \vec{j}) : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- (1) Montrer que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$.
- (2) Déterminer les coordonnées du point A tel que $\overline{OA} = \vec{w}$.
- (3) Déterminer les coordonnées du point B tel que $\overline{OB} = \vec{v}$.
- (4) Déterminer les coordonnées du point C tel que $\overline{OC} = \vec{u}$.
- (5) Déterminer les coordonnées du point B' tel que $\overline{OB'} = -2\vec{u}$.
- (6) Déterminer les coordonnées du point C' tel que $\overline{B'C'} = \vec{u} + \vec{v}$.
- (7) Déterminer les **centres de gravité** des triangles ABC et $AB'C'$.

$$G \text{ est le centre de gravité du triangle } ABC$$
$$\Leftrightarrow \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$$

Exercice 6

Soit $A(x, 4)$, $B(1, -2)$ et $C(4, x)$ trois points dans un repère cartésien (O, \vec{i}, \vec{j}) . Déterminer x tel que les points A , B et C soient alignés. Etablir pour chaque solution trouvée une **relation de colinéarité** entre les vecteurs \overline{AB} et \overline{AC} .

$$A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \overline{AB} \parallel \overline{AC}$$

Exercice 7

Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère cartésien du plan. On donne les quatre points $A(-4, -3)$, $B(2, -1)$, $C(0, 3)$ et $D(-8, 5)$.

- (1) Est-ce que $ABCD$ est un trapèze ?
- (2) Est-ce que $ABCD$ est un parallélogramme ?
- (3) Déterminer les coordonnées du point E tel que $ABCE$ soit un parallélogramme. Montrer *analytiquement* et *géométriquement* que A , E et D sont alignés.

Exercice 8

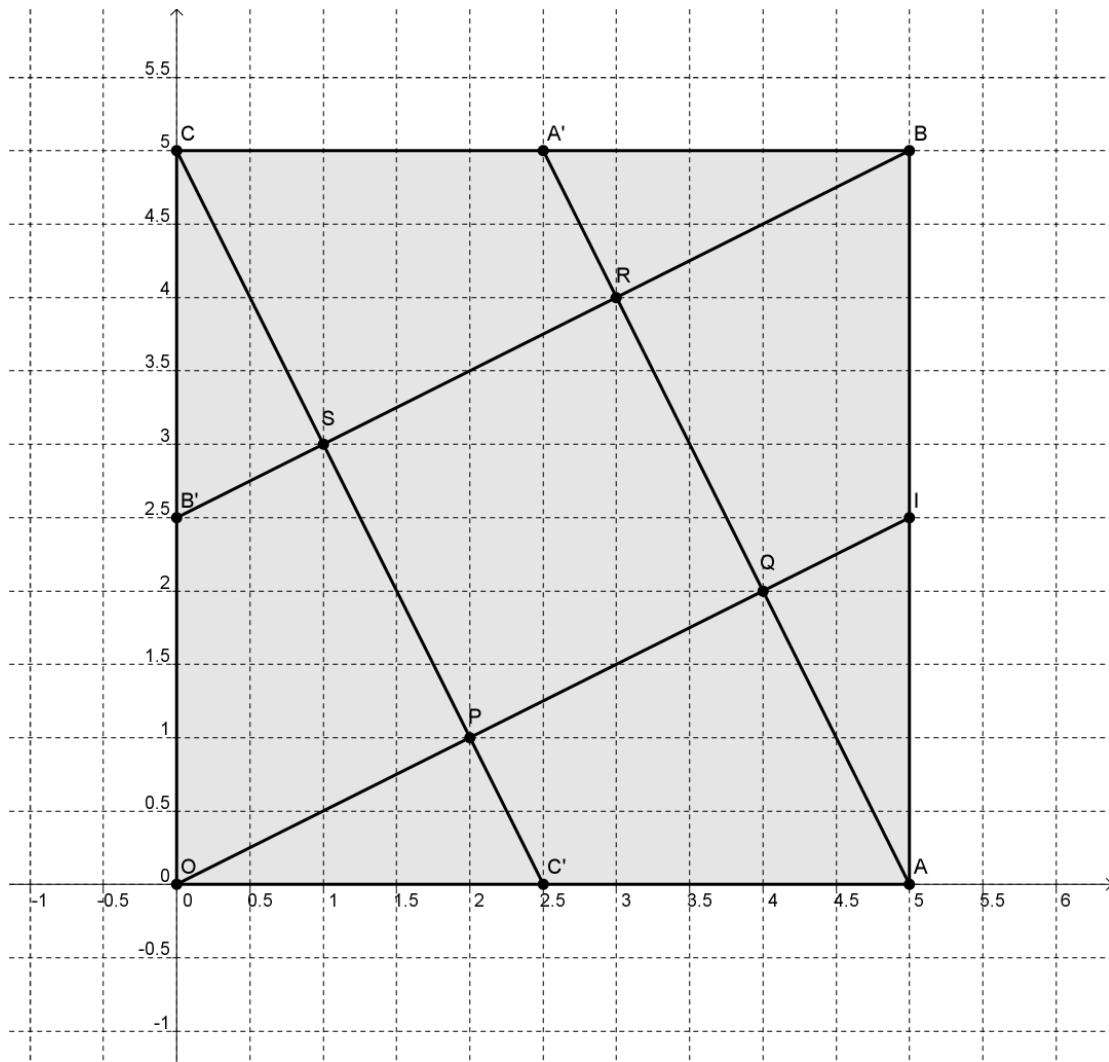
Soit ABC un triangle quelconque, I le milieu de $[AB]$ et J le point tel que $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AC}$. Soit \mathcal{R} le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

- (1) Quelles sont les coordonnées de I et de J dans \mathcal{R} ? En déduire les coordonnées de \overrightarrow{IJ} dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- (2) Soit K le point tel que $2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$. Exprimer \overrightarrow{BK} en fonction de \overrightarrow{BC} et en déduire une construction de K sur votre figure.
- (3) Déterminer les coordonnées de K dans \mathcal{R} et en déduire celles de \overrightarrow{IK} dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- (4) Montrer que les points I , J et K sont alignés.

Exercice 9

Soit $ABCD$ un parallélogramme et I le milieu de $[AD]$. Soit P le point défini par $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et soit Q le symétrique de I par rapport à A . Les points Q , P et C sont-ils alignés ? On donnera une solution analytique dans un repère bien choisi !

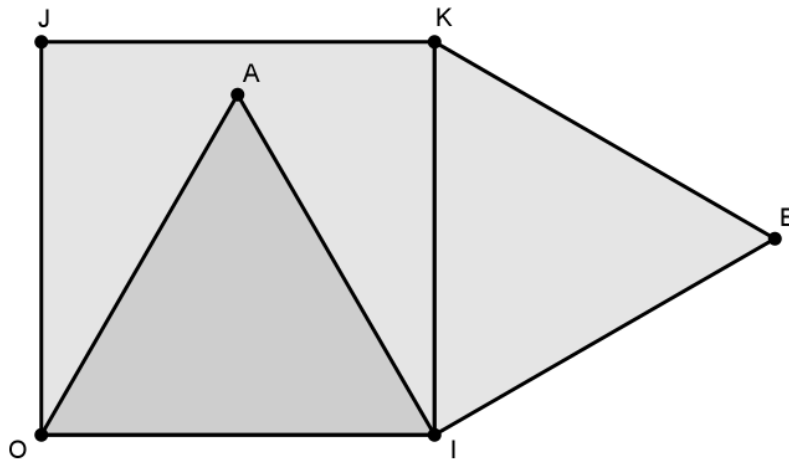
Exercice 10



Dans le repère orthonormé ci-dessus, on donne les points $A(5,0)$, $B(5,5)$, $C(0,5)$. $OABC$ est donc un carré de côté 5.

- (1) Déterminer les coordonnées de A' , B' , C' et I , milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CO]$, $[OA]$ et $[AB]$.
- (2) Déterminer une équation cartésienne des droites (AA') , (BB') , (CC') et (OI) .
- (3) En déduire les coordonnées des points d'intersection P , Q , R et S de la figure.
- (4) Justifier que a) $(RS) // (PQ)$ et $(PS) // (QR)$ b) $(PQ) \perp (PS)$ c) $PQ = PS$. En déduire la nature du quadrilatère $PQRS$ et calculer son aire.

Exercice 11



Sur la figure ci-dessus, $OIKJ$ est un carré, OIA et IKB sont deux triangles équilatéraux, l'un construit intérieurement sur le côté $[OI]$, l'autre construit extérieurement sur le côté $[IK]$. Dans tout l'exercice on travaillera dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

- (1) Déterminer les coordonnées des points O , I , J et K .
- (2) a) Etablir la formule qui donne la hauteur h d'un triangle équilatéral en fonction de la longueur d'un côté a .
b) En déduire les coordonnées des points A et B dans le repère.
- (3) Déterminer une équation cartésienne de la droite (JA) .
- (4) Que peut-on dire des points J , A et B ?

Exercice 12

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe quelconque et $I = \text{mil}[AB]$, $J = \text{mil}[BC]$, $K = \text{mil}[CD]$ et $L = \text{mil}[DA]$. On choisit comme repère $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

- (1) Montrer analytiquement que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ et en déduire la nature du quadrilatère $IJKL$. Déterminer les coordonnées du « centre » O de $IJKL$.
- (2) Déterminer les coordonnées du **centre de gravité** du quadrilatère $ABCD$: c'est l'unique point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Que constate-t-on ? Formuler le théorème obtenu en termes précis !
- (3) Soit $P = \text{mil}[AC]$ et $Q = \text{mil}[BD]$. Montrer que $G = \text{mil}[PQ]$. Formuler le théorème obtenu en termes précis !

- (4) Soit H le centre de gravité du triangle ABC . Comparer les vecteurs \overline{GH} et \overline{GD} , puis conclure.

Exercice 13

Soit $ABCD$ est un parallélogramme, I le milieu de $[AB]$ et L le milieu de $[AD]$.

- (1) Déterminer des équations cartésiennes de AC et BL dans le repère cartésien $\mathcal{R} = (A, \overline{AB}, \overline{AC})$.
- (2) Soit E le point d'intersection des droites AC et BL . Déterminer les coordonnées de E dans \mathcal{R} .
- (3) Les points I , E et D sont-ils alignés ?

Exercice 14

Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on donne les points $A(-13,0)$, $B(0,8)$, $C(8,13)$ et $D(8,0)$.

- (1) Déterminer les aires des triangles ACD et ABO ainsi que l'aire du trapèze $OBCD$. A-t-on : $\text{Aire}(ACD) = \text{Aire}(ABO) + \text{Aire}(OBCD)$?
- (2) Comment pouvez-vous expliquer ce « paradoxe » ? Justifier !