Chapitre 5

Les polynômes

1. Définitions et exemples

Définition. Un ***monôme*** de la variable x est une expression de la forme ax^n où $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. $\boldsymbol{a}$ est appelé le ***coefficient*** et $\boldsymbol{n}$ est appelé le ***degré*** du monôme.

Exemples :

- $3x$ est un monôme de la variable x, de degré 1 et de coefficient 3.
- $-\dfrac{2y^5}{7}$ est un monôme de la variable y, de degré 5 et de coefficient $-\dfrac{2}{7}$.
- $\sqrt{3}z^2$ est un monôme de la variable z, de degré 2 et de coefficient $\sqrt{3}$.
- –3 est un ***monôme constant***, c.-à-d. de degré 0.
- $2x^{-1} = \dfrac{2}{x}$ et $x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$ ne sont pas des monômes de la variable x.

Remarque. Nous considérons dans ce chapitre uniquement des monômes d'une ***seule variable***, c.-à-d. nous évitons des expressions telles que $5x^3y^2$ (monôme de 2 variables x et y) ou $9abc^2$, (monôme de 3 variables a, b et c).

Définition. Deux monômes de même degré et de la même variable sont appelés ***monômes semblables***.

Exemples :

- $4x^3$, $-x^3$ et $\sqrt{7}x^3$ sont des monômes semblables (de degré 3).
- $-\dfrac{3x^5}{8}$, $9x^2 \cdot x^3$ et $7x \cdot x^4$ sont des monômes semblables (de degré 5).
- $5x$ et $2y$ ne sont pas des monômes semblables (variables distinctes).
- $3x^2$ et $2x^3$ ne sont pas des monômes semblables (degrés distincts).

On peut ***réduire*** une somme de monômes semblables en les additionnant. Par exemple : $4x^6 + 8x^6 - 2x^6 = 10x^6$.

Définition. Un ***polynôme*** de la variable x est une somme de monômes de la variable x. Un polynôme de la variable x sera noté souvent $P(x)$, $Q(x)$, … Le ***degré*** du polynôme P, noté $\deg P$, est celui de son monôme de plus haut degré.

Exemples.

- $P(x) = 5x^3 + 7x^2 - 4x - 1$ est un polynôme de la variable x et de degré 3. Il est ***ordonné suivant les puissances décroissantes*** de x. Son ***terme constant*** (le terme sans la variable x) est -1.
- $Q(a) = 3 - 8a + 5a^2 - 2a^4$ est un polynôme de la variable a et de degré 4. Il est ***ordonné suivant les puissances croissantes*** de a. Il est ***incomplet*** parce qu'il n'a pas de terme en a^3. Son terme constant est 3.
- $S(x) = -3 + 6x^2 - 4x + 5x^2 - x^2 + 1 - 8x$ est un polynôme de la variable x et de degré 2. Il n'est ni ordonné, ni ***réduit***. Un polynôme est ***réduit*** lorsqu'il ne comporte ***plus de monômes semblables***. Pour notre exemple :
$$S(x) = 10x^2 - 12x - 2.$$
- Les polynômes précédents sont tous ***développés (effectués)***. Voici un polynôme ***factorisé*** : $T(x) = (3x^4 - 2)(x^3 + 1)$. Pour déterminer son degré, nous allons le développer :
$$T(x) = 3x^7 + 3x^4 - 2x^3 - 2.$$
On voit donc que $T(x)$ est du 7e degré. On peut aussi obtenir ce résultat par le calcul grâce à la formule :
$$\boxed{\deg(P \cdot Q) = \deg P + \deg Q}$$
- $R(z) = 4z - z^{-1}$ et $V(a) = \sqrt{a} + a - 4a^2$ ne sont pas des polynômes.

Cas particuliers : Soit $a \neq 0$:

a) Un ***binôme du 1er degré*** est un polynôme de la forme : $A(x) = ax + b$.

b) Un ***trinôme du 2e degré*** est un polynôme de la forme : $B(x) = ax^2 + bx + c$.

2. Evaluation d'un polynôme

Soit le polynôme $A(x) = 3x^3 - 4x^2 + 6x - 5$. Remplaçons x par 2 :

$$\begin{aligned} A(2) &= 3 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 5 \\ &= 3 \cdot 8 - 4 \cdot 4 + 12 - 5 \\ &= 24 - 16 + 12 - 5 \\ &= 15 \end{aligned}$$

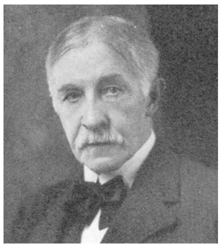
On dit qu'on a ***évalué*** le polynôme en $x = 2$. 15 est la ***valeur numérique*** du polynôme en $x = 2$. On dit aussi que 15 est ***l'image*** de 2 par A. On peut évaluer le polynôme A en tout autre réel. Voici un ***tableau des images*** du polynôme A. Essayez de retrouver ces résultats à la main !

x	2	3	1	-1	0	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{6}$
$A(x)$	15	58	0	-18	-5	$12\sqrt{2}-13$	$-\frac{25}{24}$

Quel est le ***nombre de multiplications*** que nous avons dû faire pour calculer $A(2)$?

Réponse : ....

Pour ***réduire le nombre de multiplications*** lors de l'évaluation d'un polynôme, le mathématicien anglais William George Horner (1786 – 1837) a inventé un **algorithme** (= méthode de calcul) pratique. Pour commencer, on transforme $A(x)$ de la manière suivante, en utilisant astucieusement la mise en évidence :



$$A(x) = 3x^3 - 4x^2 + 6x - 5$$
$$= \left(3x^2 - 4x + 6\right)x - 5$$
$$= \left(\left(3x - 4\right)x + 6\right)x - 5$$

D'où :

$$A(2) = \left(\left(3\cdot 2 - 4\right)\cdot 2 + 6\right)\cdot 2 - 5$$
$$= \left(\left(6 - 4\right)\cdot 2 + 6\right)\cdot 2 - 5$$
$$= \left(2\cdot 2 + 6\right)\cdot 2 - 5$$
$$= \left(4 + 6\right)\cdot 2 - 5$$
$$= 10\cdot 2 - 5$$
$$= 20 - 5$$
$$= 15$$

Schéma de Horner :

	3	-4	6	-5
2		6	4	20
	3	2	10	15

Nous observons que le nombre de multiplications dans ce calcul est seulement de ......

Dans la première ligne du schéma de Horner se trouvent les ***coefficients*** du polynôme A, suivant les puissances décroissantes de la variable. La 2^e^ ligne commence avec le réel 2, en lequel on veut évaluer le polynôme. L'algorithme consiste à recopier dans la 3^e^ ligne le premier coefficient 3, le multiplier par 2 et écrire le produit 6 dans la 2^e^ ligne en dessous du coefficient –4. Ensuite on additionne les éléments la 1^re^ et de la 2^e^ ligne ($-4+6=2$), on multiplie ce résultat à nouveau par 2, ce qui donne 4 et ainsi de suite. La valeur numérique du polynôme pour $x=2$, c.-à-d. 15, se trouve dans la dernière case du tableau. En fait nous observons que l'algorithme reproduit exactement les étapes successives du calcul qui se trouve à gauche.

3. Représentation graphique d'un polynôme

a) Complétez le tableau des images ci-dessous du polynôme $P(x) = x^2 - x - 6$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = P(x)$										

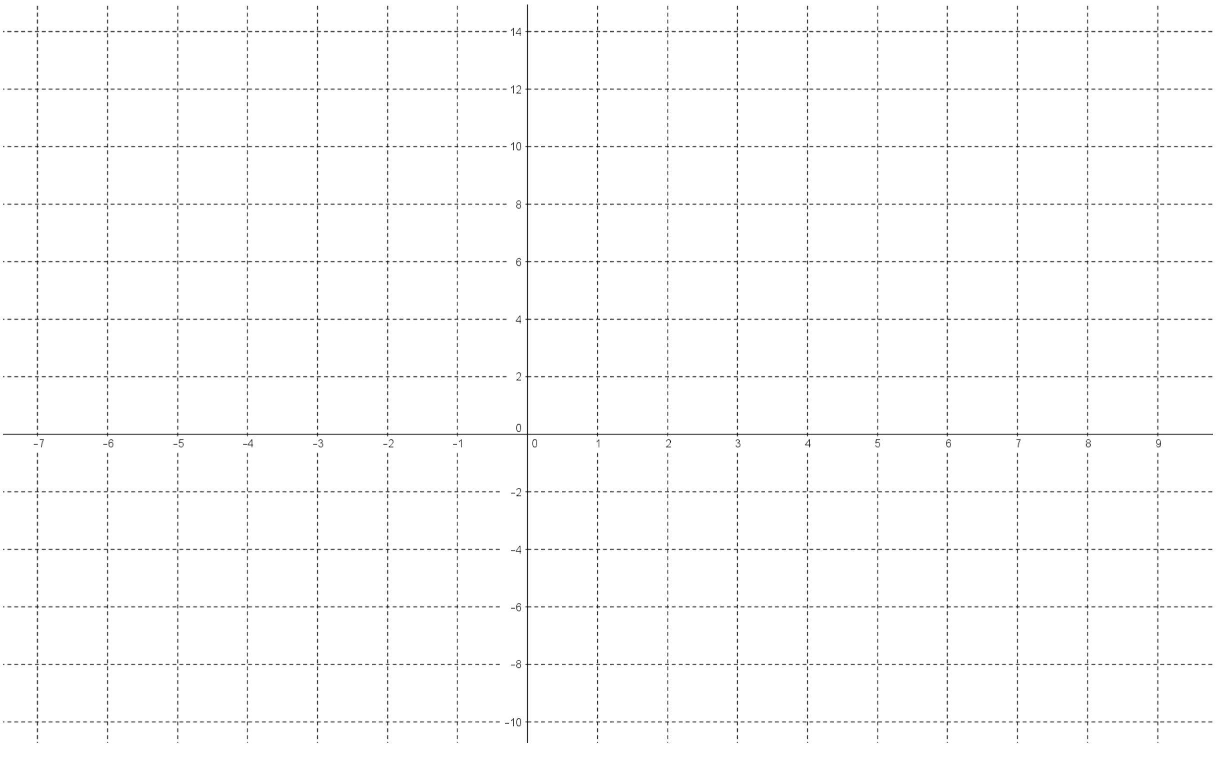
b) ***Définition.*** Un ***repère*** du plan est la donnée de deux ***axes sécants gradués*** :

- l'axe des x ou axe des ***abscisses***, (le plus souvent horizontale),
- l'axe des y ou axe des ***ordonnées***, (le plus souvent verticale),

et de leur point d'intersection, appelé l'***origine***.

Dans un repère, chaque point est déterminé par son ***couple de coordonnées*** (x,y), x étant son abscisse et y son ordonnée.

c) Représentez graphiquement les points (x, y) du tableau des images du polynôme P dans le repère ci-dessous :



d) Les points représentés en c) font partie du ***graphe*** du polynôme P. Le ***graphe*** complet du polynôme est obtenu en représentant ***tous les points*** $(x, P(x))$, où $x \in \mathbb{R}$. Tracez le graphe du polynôme P sans calculer des images supplémentaires. Dans le cas d'un polynôme du 2e degré, la courbe obtenue est appelée une ***parabole***.

e) Représentez graphiquement le polynôme du 1er degré $Q(x) = 3x - 5$. Le graphe est ici ……………………………………

4. Egalité de deux polynômes

Définition. Deux polynômes P et Q sont ***égaux*** et on écrit $P = Q$ lorsqu'ils prennent la même valeur numérique en tout réel, c.-à-d. $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)\ P(x) = Q(x)$.

Exemple : Lesquels des polynômes ci-dessous sont égaux ?

$$P(x) = \left(x+1\right)\left(x-2\right)\ ;\ Q(x) = x^2 - x - 2\ ;\ R(x) = x^2 + x - 2$$

Expliquez votre réponse !

....

....

....

....

Propriété. Deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement si ils ont le ***même degré*** et les ***coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux***.

Démonstration. Nous allons démontrer cette propriété dans le cas de deux polynômes de degré ≤ 2. On peut écrire ces polynômes sous la forme générale

$$P(x) = ax^2 + bx + c \text{ et } Q(x) = a'x^2 + b'x + c'$$

où les coefficients sont représentés par les lettres a, b, et c resp. a', b' et c'.

" $\Rightarrow$ " Supposons que $P = Q$. Il faut démontrer que $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$.

On a par définition : $(\forall x \in \mathbb{R})\ P(x) = Q(x)$.

Pour $x = 0$, on obtient : $P(0) = Q(0) \Leftrightarrow c = c'$ (1)

Pour $x = 1$, on obtient, en utilisant (1) :

$$P(1) = Q(1) \Leftrightarrow a + b + c = a' + b' + c' \Leftrightarrow a + b = a' + b' \ (2)$$

Pour $x = -1$, on obtient, en utilisant (1) :

$$P(-1) = Q(-1) \Leftrightarrow a - b + c = a' - b' + c' \Leftrightarrow a - b = a' - b' \ (3)$$

En additionnant membre par membre (2) et (3), il vient :

$$\begin{aligned} & a + b + a - b = a' + b' + a' - b' \\ \Leftrightarrow\ & 2a = 2a' \\ \Leftrightarrow\ & a = a' \quad (4) \end{aligned}$$

En substituant (4) dans (2), on obtient finalement :

$$a + b = a + b' \Leftrightarrow b = b'$$

Donc on a bien prouvé que $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$, c.-à-d. les polynômes P et Q ont même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux.

" $\Leftarrow$ " Réciproquement, supposons que $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$. Alors il est clair que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$ $P(x) = ax^2 + bx + c = Q(x)$, c.-à-d. $P = Q$.

C.Q.F.D.

Exercice 1

Soit les polynômes $A(x) = x^4 + 1$ et $B(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$.

(1) a) Calculer et comparer : $A\left(0\right)$ et $B\left(0\right)$; $A\left(2\right)$ et $B\left(2\right)$; $A\left(3\right)$ et $B\left(3\right)$; $A\left(-1\right)$ et $B\left(-1\right)$. b) Peut-on conclure que $A = B$?

(2) Montrer que $A = B$.

Exercice 2

(1) Est-ce que les polynômes $A(x) = (x+3)(x-2)$ et $B(x) = x^2 - x - 6$ sont égaux ?

(2) Déterminer le réel a pour que les polynômes $C(x) = (2x - a)(x+3)$ et $D(x) = -15 + x + 2x^2$ soient égaux.

Exercice 3

Déterminer les réels a, b et c sachant que les polynômes P et Q sont égaux :

a) $P(x) = ax^2 + (b-3)x + 2c - 1$ et $Q(x) = x^2 - 5x + 7$

b) $P(t) = 3t^2 + (2b-1) - 7t$ et $Q(t) = (a+3)t^2 + ct + b$

c) $P(y) = (a+b+c)y^2 + (a+b)y + a$ et $Q(y) = 4 - 2y + 7y^2$

d) $P(z) = (a+3b)z^3 + (a-3b)z + 4$ et $Q(z) = 7z^3 - 5z + c$

e) $P(x) = (a+b)x^2 + c - 3a$ et $Q(x) = (a-b)x^2 + (a-2)x - 9$

f) $P(x) = (2a-b)x^2 + (a-2b+1)x + a + b + c$ et $Q(x) = 0$

g) $P(x) = (a+3b)x - 2a$ et $Q(x) = -bx + 2b + 1$

5. Opérations sur les polynômes

La ***somme*** de deux polynômes P et Q est le polynôme $P + Q$ défini par :

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x)$$

La ***différence*** de deux polynômes P et Q est le polynôme $P - Q$ défini par :

$$(P-Q)(x) = P(x) - Q(x)$$

Le ***produit*** de deux polynômes P et Q est le polynôme $P \cdot Q$ défini par :

$$(P \cdot Q)(x) = P(x) \cdot Q(x)$$

Le ***produit*** d'un polynôme P ***par un réel*** k est le polynôme kP défini par :

$$(kP)(x) = k \cdot P(x)$$

Exemples. Soit $P(x)=2x^2-3x+4$ et $Q(x)=5x^3+7x^2-x-6$. Alors :

- $(P+Q)(x)$
$=P(x)+Q(x)$
$=(2x^2-3x+4)+(5x^3+7x^2-x-6)$
$=5x^3+9x^2-4x-2$

- $(P-Q)(x)$
$=P(x)-Q(x)$
$=(2x^2-3x+4)-(5x^3+7x^2-x-6)$
$=-5x^3-5x^2-2x+10$

- $(P\cdot Q)(x)$
$=P(x)\cdot Q(x)$
$=(2x^2-3x+4)\cdot(5x^3+7x^2-x-6)$
$=10x^5-x^4-3x^3+19x^2+14x-24$

- $(3P)(x)$
$=3\cdot P(x)$
$=3\cdot(2x^2-3x+4)$
$=6x^2-9x+12$

Remarque. Pensez toujours à ***réduire* et *ordonner*** les résultats.

Exercice 2

Calculer le produit des polynômes suivants dans le tableau ci-dessous et déterminer les degrés de tous les polynômes :

$P(x)$	$\deg P$	$Q(x)$	$\deg Q$	$P(x)\cdot Q(x)$	$\deg(P\cdot Q)$
$3x-5$		$2x-4$			
x^2-2x+6		$4x+9$			
$2x^4-3$		$1-5x^7$			
x^3+x^2-2x-8		x^2-7x			

Que peut-on dire en général sur le degré de $P\cdot Q$?

....

Exercice 3

Calculer la somme des polynômes suivants dans le tableau ci-dessous et déterminer les degrés de tous les polynômes :

$P(x)$	$\deg P$	$Q(x)$	$\deg Q$	$P(x)+Q(x)$	$\deg(P+Q)$
$3x+5$		$2x^2-x-1$			
$4x^3-3x^2-5x+6$		$9+4x+x^2$			
x^5+3		$1-3x-x^7$			
x^3-5x^2-2x+1		$2x^3+6x^2+7x$			
x^3-5x^2-2x+1		$-x^3+5x^2+4x-2$			
$4x^3-5x^2-1$		$4x^3-5x^2-2$			

Recopier le tableau et refaire l'exercice en remplaçant $P(x)+Q(x)$ par $P(x)-Q(x)$.
Que peut-on dire en général sur le degré de $P+Q$ et de $P-Q$?

....

....

Exercice 4

Soit les polynômes $A(k)=1-2k+3k^2-4k^3$, $B(k)=5k-k^2$ et $C(k)=5+k^3$

a) Calculer les polynômes suivants :

$D=A+B+C$;

$E=-A+B-C$;

b) Calculer ensuite le polynôme $S=D+E$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

c) Calculer rapidement : $\left(D+E\right)^2$

Exercice 5

Calculer la somme S et la différence D des polynômes $P(y)=\sqrt{2}y-4y^2+\sqrt{2}y^3$ et $Q(y)=2-3\sqrt{2}y+5\sqrt{2}y^2$. Vérifier les résultats en calculant la valeur numérique de chacun des polynômes en $y=-\sqrt{2}$ et $y=-2$.

Exercice 6

Si $P(x)=4x-3$ et $Q(x)=x^2+x-1$, calculer les polynômes P^2, $2PQ$, Q^2, $(P+Q)^2$ et déterminer une relation entre ces polynômes.

Exercice 7

Soit les polynômes $A(x)=x^2+3x-3$ et $B(x)=ax+b$. Calculer les réels a et b sachant que $A(1)\cdot B(1)=3$ et $A(1)+B(1)=4$.

Exercice 8

Soit les polynômes $A(x)=x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{10}$ et $B(x)=\left(\frac{3}{4}x-1\right)\left(\frac{1}{5}x+3\right)$.

a) Déterminer le polynôme P tel que $A+P=C$.

b) Déterminer le polynôme Q tel que $2A-Q=4C$.

6. Division d'un polynôme par un polynôme

a) Division d'un *monôme* par un *monôme*.

Exemples.

$$\frac{7x^5}{2x^2}=\frac{7}{2}x^3 \qquad \frac{0,5y^6}{2y}=\frac{1}{4}y^5 \qquad \frac{18z^2}{63z^3}=\frac{2}{7z} \qquad \frac{-7s}{3s}=-\frac{7}{3}$$

Quel est l'intrus dans cette liste ? Pourquoi ?

....

....

Retenons. Le quotient de deux monômes est un monôme si et seulement si le degré du numérateur est $\geq$ degré du dénominateur.

b) Division un *polynôme* par un *monôme*

Exemples. i) ***Division usuelle*** du polynôme $P(x)=8x^4-6x^3+5x^2-3x+7$ par le monôme $2x$:

$$\frac{8x^4-6x^3+5x^2-3x+7}{2x}=4x^3-3x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}+\frac{7}{2x}$$

On a divisé chaque terme de $P(x)$ par $2x$. Le résultat (quotient) n'est pas un polynôme à cause du dernier terme $\frac{7}{2x}$. Voilà pourquoi nous préférons à la division usuelle la « ***division euclidienne*** », dans laquelle apparaît un polynôme ***quotient*** et un polynôme ***reste*** :

$$8x^4-6x^3+5x^2-3x+7=2x\cdot\underbrace{\left(4x^3-3x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)}_{\text{quotient}}+\underbrace{7}_{\text{reste}}$$

Dans la division euclidienne, le reste est 7. Remarquons que son ***degré*** est 0 et donc ***inférieur au degré du diviseur*** $2x$.

Remarque : Observer l'analogie avec la division des entiers.

$$\frac{257}{10}=25+\frac{7}{10}\ \text{(division usuelle)} \longrightarrow 257=10\cdot 25+7\ \text{(division euclidienne)}$$

Dans la division euclidienne des entiers, le reste (7) est toujours $<$ diviseur (10).

ii) ***Division usuelle*** du polynôme $P(x)=x^4-2x^3-5x^2+3x-4$ par le monôme $3x^3$:

$$\frac{x^4-2x^3-5x^2+3x-4}{3x^3}=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}-\frac{5}{3x}+\frac{1}{x^2}-\frac{4}{3x^3}$$

Division euclidienne : $x^4-2x^3-5x^2+3x-4=3x^3\underbrace{\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)}_{\text{quotient}}+\underbrace{\left(-5x^2+3x-4\right)}_{\text{reste}}$

Nous remarquons encore une fois que : ***degré du reste*** $<$ ***degré du diviseur***.

c) Cas général : *Division euclidienne* d'un *polynôme* par un *polynôme*

Le schéma de la division euclidienne des polynômes ressemble beaucoup à celui de la division euclidienne des entiers.

Exemple : i) Division euclidienne de $A(x) = 4x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$ (***dividende***) par $B(x) = x^2 + 1$ (***diviseur***) :

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
4x^5 & -x^4 & +2x^3 & +x^2 & & -1 & x^2+1 \\
-4x^5 & & -4x^3 & & & & \underbrace{4x^3 - x^2 - 2x + 2}_{\text{quotient}} \\
\hline
& -x^4 & -2x^3 & +x^2 & & -1 & \\
& x^4 & & +x^2 & & & \\
\hline
& & -2x^3 & +2x^2 & & -1 & \\
& & 2x^3 & & +2x & & \\
\hline
& & & 2x^2 & +2x & -1 & \\
& & & -2x^2 & & -2 & \\
\hline
& & & & \underbrace{2x - 3}_{\text{reste}} & &
\end{array}
$$

Donc :

$$4x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 1 = \left(x^2 + 1\right)\underbrace{\left(4x^3 - x^2 - 2x + 2\right)}_{Q(x)\text{ quotient}} + \underbrace{2x - 3}_{R(x)\text{ reste}}$$

Méthode : A chaque étape on divise ***le monôme du plus haut degré du dividende*** par ***le monôme du plus haut degré du diviseur***, c.-à-d. par x^2. La première fois on obtient $4x^5 \,/\, x^2 = 4x^3$; c'est le premier terme du quotient. On multiplie ensuite $4x^3$ par le diviseur $x^2 + 1$, ce qui donne $4x^5 + 4x^3$ et on retranche ce produit du dividende. (Pour des raisons pratiques, on change de signe chaque terme du produit $4x^5 + 4x^3$ dans la 2e ligne afin de pouvoir additionner au lieu de soustraire.)

- Le nouveau dividende, que nous appelons plutôt le «premier reste », est maintenant $-x^4 - 2x^3 + x^2 - 1$, et on recommence l'algorithme.
- On arrête l'algorithme dès que : ***degré du reste*** < ***degré du diviseur*** (=2). On obtient un reste de degré 1 dans l'exemple.

ii) $A(x) = x^2 - 4$ et $B(x) = x + 2$. Nous savons depuis la 5e que :

$$x^2 - 4 = (x + 2)\underbrace{\left(x - 2\right)}_{\text{quotient}} + \underbrace{0}_{\text{reste}}$$

Dans ce cas, la division est exacte : $x^2 - 4$ est ***divisible par*** $x + 2$. On dit encore que $x + 2$ (et $x - 2$) sont des ***diviseurs*** de $x^2 - 4$.

iii) Dans le cas particulier où $\deg A < \deg B$, la division est particulièrement simple. Par exemple, si $A(x) = 3x + 4$ et $B(x) = x^2 - x + 1$ alors :

$$3x + 4 = \left(x^2 - x + 1\right) \cdot 0 + 3x + 4$$

En d'autres termes : le quotient est alors 0 et le reste est égal au dividende.

iv) Lorsque le diviseur est de la forme $B(x) = x - a$ où a est une ***constante***, on peut faire la division euclidienne à l'aide du ***schéma de Horner***. Si par exemple $A(x) = 3x^3 - 4x^2 + 6x - 5$ (polynôme de la page 3) et $B(x) = x - 2$, on a vu que :

Schéma de Horner :

	3	–4	6	-5
2		6	4	20
	3	2	10	15

Dans ce schéma la dernière ligne contient les ***coefficients du polynôme quotient***, suivant les puissances décroissantes de la variable (à vérifier en exercice) et le ***reste***, qui est une constante puisque $\deg R < \deg B = 1$.

Donc :

$$3x^3 - 4x^2 + 6x - 5 = \left(x - 2\right)\underbrace{\left(3x^2 + 2x + 10\right)}_{\text{quotient}} + \underbrace{15}_{\text{reste}}$$

Résumons :

Proposition et définition. Etant donné deux polynômes A et B, avec $B \neq 0$, il existe un ***unique*** polynôme Q et un ***unique*** polynôme R tels que :

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x) \text{ avec } \deg R < \deg B$$

Cette égalité est appelée la ***division euclidienne*** du polynôme A (le ***dividende***) par le polynôme B (le ***diviseur***). Q est appelé le polynôme ***quotient*** et R est appelé le polynôme ***reste***.

Cette proposition est admise.

Remarques.

- Si $R = 0$, alors on dit que la ***division est exacte***. Dans ce cas : $A = B \cdot Q$ et on dit que A est ***divisible*** par B ou que B est un ***diviseur*** de A.
- On n'a pas le droit de diviser par le polynôme 0, donc $B \neq 0$.
- Si $\deg A < \deg B$ alors $Q = 0$ et $R = A$.
- Si $\deg A \geq \deg B$ alors $\deg Q = \deg A - \deg B$.

7. Loi du reste

Reprenons le polynôme $A(x)=3x^3-4x^2+6x-5$ et le schéma de Horner de la page précédente :

	3	-4	6	-5
2		6	4	20
	3	2	10	15

D'après ce que nous avons vu, l'utilité de ce schéma est ***double*** :

a) On peut l'utiliser pour faire la ***division euclidienne*** de $A(x)$ par $x-2$. Dans ce cas 15 est le reste dans cette division euclidienne (voir page précédente).

b) Mais on peut aussi utiliser le schéma pour ***évaluer*** $A(x)$ ***en*** $x=2$, comme on l'a vu à la page 3. Là aussi le résultat se trouve dans la dernière case : $A(2)=15$.

En général :

Loi du reste. Le ***reste*** de la division euclidienne d'un polynôme $A(x)$ par $x-a$ est égal à $A(a)$.

Démonstration. Ecrivons la division euclidienne de $A(x)$ par $x-a$:

$$A(x)=(x-a)Q(x)+R(x).$$

Comme $\deg R(x)<\deg(x-a)$, c.-à-d. $\deg R(x)<1$, on doit avoir $\deg R(x)=0$, c.-à-d. le reste est une constante. On peut donc poser :

$$R(x)=r \text{ avec } r\in\mathbb{R}.$$

Nous obtenons alors :

$$A(a)=\underbrace{(a-a)}_{=0}\cdot Q(a)+r=r$$

Donc : $A(a)=r$, ce qu'il fallait démontrer.

Applications.

(1) Calculons le reste r de la division de $P(t)=4t^3-3t^2+6t-1$ par $t+2$. D'après la loi du reste, on a :

$$r=P(-2)=4\cdot(-8)-3\cdot 4+6\cdot(-2)-1=-32-12-12-1=-57$$

(2) Soit $P(x)=x^3-2x^2-9$. Observons que :

$$P(3)=27-2\cdot 9-9=0.$$

Donc le reste de la division de $P(x)$ par $x-3$ est 0. Cela signifie que le polynôme $P(x)$ est ***divisible*** par $x-3$. Déterminons le quotient de la division de $P(x)$ par $x-3$ à l'aide du schéma de Horner :

	1	–2	0	–9
3				

On obtient donc la ***factorisation*** suivant du polynôme $P(x)$:

$$P(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ce dernier exemple montre comment la loi du reste permet de trouver un diviseur d'un polynôme. Plus précisément :

Corollaire[1] de la loi du reste. Un polynôme $A(x)$ est ***divisible*** par $x-a$ si et seulement si $A(a)=0$.

Démonstration. Evidente :

$A(x)$ est divisible par $x-a$

$\Leftrightarrow$ le reste de la division euclidienne de $A(x)$ par $x-a$ est 0

$\Leftrightarrow$ $A(a)=0$, d'après la loi du reste

8. Racines d'un polynôme et factorisation

Nous avons déjà vu plusieurs méthodes de factorisation que nous allons repasser en revue dans le cadre de la factorisation des polynômes.

a) Mise en évidence

Exemples.

- $P_1(x) = x^2 - 3x = x(x-3)$
- $P_2(x) = 2x^5 - 8x^4 + 6x^3 = 2x^3(x^2 - 4x + 3)$

Donc si le terme constant de $P(x)$ est 0, alors on peut mettre x (ou une puissance de x) en évidence.

b) Identités remarquables

Exemples.

- $P_3\left(x\right) = 9x^2 - 16 = (3x-4)(3x+4)$ (différence de deux carrés)
- $P_4(x) = 25x^2 - 30x + 9 = (5x-3)^2$ (trinôme carré parfait)
- $P_5(x) = x^2 + 3x + 2{,}25 = (x + \frac{3}{2})^2$ (trinôme carré parfait)
- $P_6(x) = x^4 - 25 = (x^2-5)(x^2+5) = (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x^2+5)$

On essaie si possible de former des facteurs du 1er degré !

[1] Un corollaire est une conséquence immédiate d'un théorème.

Rappelons les identités remarquables du ***2e degré*** :

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ (différence de deux carrés)
- $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ (trinôme carré parfait)
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ (trinôme carré parfait)
- $a^2 + b^2$ (somme de deux carrés) ***ne se factorise pas*** !

Il est parfois utile de connaître les identités remarquables du ***3e degré*** :

- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ (différence de deux cubes)
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ (somme de deux cubes)
- $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$
- $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$

On démontrera ces identités ***en exercice***.

c) Méthode du groupement de termes

Exemples.

$$\begin{aligned}
P_8(x) &= x^3 - x^2 - x + 1 \\
&= \left(x^3 - x^2\right) - \left(x - 1\right) \quad \text{(groupement 2 termes / 2 termes)} \\
&= x^2\left(x-1\right) - \left(x-1\right) \\
&= \left(x-1\right)\left(x^2-1\right) \\
&= \left(x-1\right)\left(x-1\right)\left(x+1\right) \\
&= \left(x-1\right)^2\left(x+1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_9(x) &= x^4 - x^2 - 2x - 1 \\
&= x^4 - \left(x^2 + 2x + 1\right) \quad \text{(groupement 1 terme / 3 termes)} \\
&= x^4 - \left(x+1\right)^2 \\
&= \left(x^2\right)^2 - \left(x+1\right)^2 \quad \text{(différence de deux carrés)} \\
&= \left(x^2 - x - 1\right)\left(x^2 + x + 1\right) \quad \text{(facteurs du 2e degré !)}
\end{aligned}$$

Comme le montrent ces deux exemples, cette méthode n'est pas toujours évidente …

d) Méthode de la racine entière

Comme nous l'avons déjà vu plus haut (application 2 p. 11), on arrive à factoriser un polynôme lorsqu'on connaît une ***valeur qui annule le polynôme***. Un tel nombre réel est appelé une ***racine*** du polynôme. Par exemple, 3 est une racine du polynôme $P(x) = x^3 - 2x^2 - 9$ car $P(3) = 0$.

Définition. Une ***racine*** (ou un ***zéro***) d'un polynôme $P(x)$ est une solution de l'équation $P(x) = 0$. C'est donc un réel a tel que $P(a) = 0$.

Mais comment peut-on trouver ou deviner une racine d'un polynôme ?

La proposition suivante donne une réponse partielle à cette question.

Proposition (Méthode de la racine entière). Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients ***entiers***. Si r est une ***racine entière*** de $P(x)$, alors r est un diviseur du terme constant de $P(x)$.

Exemple : $P(x) = x^3 - 2x^2 - 9$.

Si ce polynôme admet une racine entière, c'est nécessairement un diviseur de –9.

$$\mathrm{Div}(-9) = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\} \qquad \begin{aligned} &P(1) = 1 - 2 - 9 = -10 \neq 0 \\ &P(-1) = -1 - 2 - 9 = -12 \neq 0 \\ &P(3) = 27 - 2 \cdot 9 - 9 = 0 \end{aligned}$$

Donc $P(x)$ est divisible par $x - 3$.

Le schéma de Horner donne : $P(x) = (x-3)(x^2 + x + 3)$.

On peut essayer d'appliquer la méthode une seconde fois au polynôme quotient $Q(x) = x^2 + x + 3$, afin d'obtenir des facteurs du premier degré. Comme le terme constant de $Q(x)$ est égal à 3, les seuls entiers possibles comme racines de $Q(x)$ sont les diviseurs de 3 : $\mathrm{Div}\, 3 = \{\pm 1, \pm 3\}$.

$$Q(1) = 1 + 1 + 3 = 5 \neq 0 \qquad Q(3) = 9 + 3 + 3 = 18 \neq 0$$
$$Q(-1) = 1 - 1 + 3 = 3 \neq 0 \qquad Q(-3) = 9 - 3 + 3 = 9 \neq 0$$

Donc ici la méthode de la racine entière échoue : le polynôme $Q(x)$ n'admet pas de racine entière. (On peut démontrer que $Q(x)$ n'admet pas de racine).

Remarque. Pourquoi était-il superflu de tester si 1 et -1 sont des racines de $Q(x)$?

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………..

Démonstration de la méthode de la racine entière (pour un polynôme de degré 4) : Soit $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ un polynôme de degré 4, à coefficients entiers, c.-à-d. $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$ et $a \neq 0$. Supposons que r est une racine de ce polynôme, c.-à-d. que $P(r) = 0$. Alors :

$$\begin{aligned} &ar^4 + br^3 + cr^2 + dr + e = 0 \\ &\Leftrightarrow e = -ar^4 - br^3 - cr^2 - dr \\ &\Leftrightarrow e = r \cdot (-ar^3 - br^2 - cr - d) \end{aligned}$$

Donc $e = r \cdot q$ avec $q = -ar^3 - br^2 - cr - d \in \mathbb{Z}$.

Ainsi e est divisible par r.