# CHAPITRE 4
# Les fractions algébriques

## 1. Définition et exemples

***Définition***. Une ***fraction algébrique*** est une fraction qui contient des variables[1].

***Exemples***.

- $\dfrac{2x^2}{x+1}$ est une fraction algébrique de la variable *x*. Si par exemple $x=2$, cette fraction vaut $\dfrac{8}{3}$.
- $\dfrac{a+2b}{a-b}$ est une fraction algébrique des variables *a* et *b*. Si par exemple $a=3$ et $b=2$, alors cette fraction est égale à 7.

***Remarque importante***. Une fraction algébrique existe si et seulement si son ***dénominateur ne s'annule pas***. Retenons donc :

***Condition d'existence*** : $\dfrac{a}{b}$ existe $\Leftrightarrow b \neq 0$

***Exemples***.

- $\dfrac{2x^2}{x+1}$ existe $\Leftrightarrow x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.
- $\dfrac{a+2b}{a-b}$ existe $\Leftrightarrow a-b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq b$.

## 2. Simplification et amplification

a) ***Simplifier*** une fraction algébrique par un réel **non nul** *m* signifie : ***diviser*** le numérateur et le dénominateur de cette fraction par *m*.

***Simplification*** par $m \neq 0$ : $\dfrac{a \cdot \mathbf{m}}{b \cdot \mathbf{m}} = \dfrac{a}{b}$

***Exemples de simplification***.

- $\dfrac{4x}{6y} = \dfrac{\mathbf{2} \cdot 2x}{\mathbf{2} \cdot 3y} = \dfrac{2x}{3y}$ (Simplification par **2**)
- $\dfrac{3ab^2}{5b} = \dfrac{3ab \cdot \mathbf{b}}{5 \cdot \mathbf{b}} = \dfrac{3ab}{5}$ (Simplification par **b**)
- $\dfrac{x^2+x}{3x+3} = \dfrac{x \cdot (x+1)}{3 \cdot (x+1)} = \dfrac{x}{3}$ (Simplification par $x+1$)

***Attention !*** On peut seulement simplifier une fraction algébrique par un ***facteur commun du numérateur et du dénominateur***. Avant de simplifier une fraction, il faut donc ***factoriser*** le numérateur et le dénominateur (cf. dernier exemple ci-dessus). En général, on simplifie la fraction par le ***plus grand commun diviseur (pgcd)*** du numérateur et du dénominateur.

[1] Une variable est une lettre représentant un nombre réel quelconque.

***Contre-exemples***.

- On ne peut pas simplifier la fraction $\dfrac{x+2}{4}$ par 2 puisque 2 n'est pas un facteur du numérateur.
- On ne peut pas simplifier la fraction $\dfrac{x^2-1}{x+1}$ par $x$ puisque $x$ n'est pas un facteur du numérateur, ni du dénominateur. On peut néanmoins simplifier la fraction par $x+1$ à condition de factoriser d'abord le numérateur : $\dfrac{x^2-1}{x+1} = \dfrac{(x-1)\cdot(x+1)}{1\cdot(x+1)} = \dfrac{x-1}{1} = x-1$.

b) ***Amplifier*** une fraction algébrique par un réel **non nul** $m$ signifie : ***multiplier*** le numérateur et le dénominateur de cette fraction par $m$. L'amplification est donc le contraire de la simplification.

| | |
|---|---|
| ***Amplification*** par **m** : | $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a\cdot\mathbf{m}}{b\cdot\mathbf{m}}$ |

***Exemples d'amplification***.

- $\dfrac{2x}{3y} = \dfrac{\mathbf{2}\cdot 2x}{\mathbf{2}\cdot 3y} = \dfrac{4x}{6y}$ (Amplification par **2**)
- $\dfrac{3ab}{5} = \dfrac{3ab\cdot\mathbf{b}}{5\cdot\mathbf{b}} = \dfrac{3ab^2}{5b}$ (Amplification par **b**)
- $\dfrac{x}{3} = \dfrac{x\cdot(x+1)}{3\cdot(x+1)} = \dfrac{x^2+x}{3x+3}$ (Amplification par $x+1$)

## 3. Somme et différence de fractions algébriques

Faisons la somme (ou la différence) de deux fractions de même dénominateur :

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a\pm c}{b}$$

Faisons la somme (ou la différence) de deux fractions quelconques :

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a\cdot\mathbf{d}}{b\cdot\mathbf{d}} \pm \frac{\mathbf{b}\cdot c}{\mathbf{b}\cdot d} = \frac{ad\pm bc}{bd}$$

Expliquons :

- Dans la 1re formule les fractions ont même dénominateur : il suffit alors d'additionner (ou de soustraire) les numérateurs sur ce dénominateur commun.
- Dans la 2e formule les fractions n'ont pas le même dénominateur : il faut alors ***amplifier*** chacune d'elles pour obtenir un ***dénominateur commun***. Ici, le dénominateur commun (le plus simple) est le ***produit*** des deux dénominateurs $b$ et $d$. En général, le dénominateur commun est le ***plus petit commun multiple (ppcm)*** de tous les dénominateurs intervenant dans la somme.

Donnons quelques exemples afin d'éclaircir la notion de ppcm.

- $\dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{6} = \dfrac{3a}{12} + \dfrac{2b}{12} = \dfrac{3a+2b}{12}$ $\quad \mathrm{ppcm}(4,6) = 12$
- $\dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{4x}{x^2} + \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{4x+3}{x^2}$ $\quad \mathrm{ppcm}(x, x^2) = x^2$
- $\dfrac{7a}{12x} - \dfrac{3b}{20y} = \dfrac{35ay}{60xy} - \dfrac{9bx}{60xy} = \dfrac{35ay-9bx}{60xy}$ $\quad \mathrm{ppcm}(12x, 20y) = 60xy$

- $$\frac{4}{x+1}-\frac{3}{x-1}=\frac{4(x-1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{3(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$ ppcm$(x+1,x-1)=(x+1)(x-1)$
$$=\frac{4(x-1)-3(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{4x-4-3x-3}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{x-7}{(x+1)(x-1)}$$

***Laisser le dénominateur du résultat sous forme factorisé !!***

Voici un dernier exemple plus compliqué :

- $$\frac{1}{1-a}+\frac{a+1}{a^3-a}-\frac{4}{a^2-2a+1}$$
$$=\frac{1}{1-a}+\frac{a+1}{a(a^2-1)}-\frac{4}{(a-1)^2}$$

***Avant de chercher le dénominateur commun, il faut factoriser tous les dénominateurs !!***

$$=\frac{1}{1-a}+\frac{\cancel{a+1}}{a(a-1)\cancel{(a+1)}}-\frac{4}{(a-1)^2}$$

***Avant de chercher le dénominateur commun, simplifier si possible les fractions !!***

***Remarquer les facteurs opposés*** $a-1$ ***et*** $1-a$

$$=\frac{-1}{a-1}+\frac{1}{a(a-1)}-\frac{4}{(a-1)^2}$$
$$=\frac{-a(a-1)}{a(a-1)^2}+\frac{a-1}{a(a-1)^2}-\frac{4a}{a(a-1)^2}$$

***Le dénominateur commun est :***
ppcm$\left(a-1,a(a-1),(a-1)^2\right)=a(a-1)^2$

$$=\frac{-a^2+a+a-1-4a}{a(a-1)^2}$$
$$=\frac{-a^2-2a-1}{a(a-1)^2}$$
$$=\frac{-(a^2+2a+1)}{a(a-1)^2}$$
$$=-\frac{(a+1)^2}{a(a-1)^2}$$

***Factoriser le résultat si possible, i.e.***
- ***laisser le dénominateur sous forme factorisée***

***et***
- ***factoriser si possible le numérateur du résultat***

## 4. Produit et quotient de fractions algébriques

Pour faire le produit de deux fractions, il est inutile de prendre un dénominateur commun :

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

En particulier : $$a\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{1}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{d}$$

***Exemples***.

- $\dfrac{3x}{2y}\cdot\dfrac{5}{2a}=\dfrac{3x\cdot 5}{2y\cdot 2a}=\dfrac{15x}{4ay}$
- $\dfrac{a-2}{3(a+1)}\cdot\dfrac{a^2+a}{a^2-4}=\dfrac{(a-2)(a^2+a)}{3(a+1)(a^2-4)}=\dfrac{\cancel{(a-2)}a\cancel{(a+1)}}{3\cancel{(a+1)}\cancel{(a-2)}(a+2)}=\dfrac{a}{3(a+2)}$

Voici la formule donnant le quotient de deux fractions :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

En particulier : $$\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{1}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c}=\frac{a}{bc}$$

et : $$\frac{a}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{1}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{1}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{c}$$

***Exemples***.

- $\dfrac{\frac{2}{x^2}}{\frac{4}{x}}=\dfrac{2}{x^2}\cdot\dfrac{x}{4}=\dfrac{2x}{4x^2}=\dfrac{1}{2x}$
- $\dfrac{\frac{a}{2b}}{3c}=\dfrac{a}{2b}\cdot\dfrac{1}{3c}=\dfrac{a}{6bc}$
- $\dfrac{a}{\frac{2b}{3c}}=\dfrac{a}{1}\cdot\dfrac{3c}{2b}=\dfrac{3ac}{2b}$
- $\dfrac{\frac{x-6}{x+6}}{\frac{x^2-36}{x^2+12x+36}}=\dfrac{x-6}{x+6}\cdot\dfrac{x^2+12x+36}{x^2-36}=\dfrac{x-6}{x+6}\cdot\dfrac{(x+6)^2}{(x+6)(x-6)}=1$

Pour terminer ce chapitre, nous insistons sur un point important :

***Opposé d'une fraction*** : $-\dfrac{a}{b}=\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}$

***Exemples***.

- $-\dfrac{1}{a-3}=\dfrac{1}{3-a}$
- $-\dfrac{x+4}{3-y}=\dfrac{-x-4}{3-y}=\dfrac{x+4}{y-3}$