Chapitre 7 : Racines carrées

1. Introduction, définitions et exemples

Sachant que les carreaux ci-dessous ont comme dimensions 1 cm, construisez

a) un carré A d'aire égale à 9 cm^2 ;
b) un carré B d'aire égale à 16 cm^2 ;
c) un carré C d'aire égale à 2 cm^2 ;
d) un carré D d'aire égale à 5 cm^2 .

b) Quelle est la longueur d'un côté dans chaque cas ?

a) ....
b) ....
c) ....
d) ....

Définition géométrique. La ***racine carrée*** d'un ***nombre réel positif*** a est la ***longueur*** d'un côté d'un carré dont l'aire est égale à a.

Définition algébrique. La ***racine carrée*** d'un ***nombre réel positif*** a est le ***nombre réel positif*** dont le carré est a. On la note $\sqrt{a}$. Le symbole $\sqrt{\ }$ est appelé ***radical***.

Exemples.

$\sqrt{9} =$ ....
$\sqrt{16} =$ ....
$\sqrt{121} =$ ....
$\sqrt{0,49} =$ ....
$\sqrt{\dfrac{36}{81}} =$ ....
$\sqrt{-100} =$ ....

Expliquez pourquoi ***la racine carrée d'un nombre réel*** < 0 ***n'existe pas*** !

Conséquences de la définition :

a) ***Condition d'existence*** : $\sqrt{a}$ existe $\Leftrightarrow a \geq 0$.

b) Si $a \geq 0$ alors $\sqrt{a}^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.

c) Par définition : $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$ et $b \geq 0$.

Exemples :

$\sqrt{13}^2 =$ .... $\sqrt{-5^2} =$ .... $-\sqrt{12}^2 =$ ....

$\sqrt{19^2} =$ .... $\sqrt{(-8)^2} =$ .... $\left(-\sqrt{5}\right)^4 =$ ....

2. Valeur approchée d'une racine carrée

Déterminez les entiers naturels dont la ***racine carrée est un entier*** :

n											
$\sqrt{n}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

n										
$\sqrt{n}$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Ces entiers sont appelés .... Il faut les connaître par cœur !

Retenons qu'on ***ne peut pas calculer exactement*** la racine carrée d'un entier qui n'est pas un carré parfait :

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \ldots$ sont des ***nombres irrationnels*** !

Détermination d'une valeur approchée par différentes méthodes :

a) A l'aide d'une ***calculatrice*** :

a	2	3	5	6	7	8	10
$\sqrt{a}$							

b) A la main, par approximations successives. Cherchons par exemple une valeur approchée de $\sqrt{60}$:

1re étape : $7^2 = 49$ et $8^2 = 64$, donc : .... $< \sqrt{60} <$ ....

2e étape : $7,5^2 =$ ...., donc : .... $< \sqrt{60} <$ ....

3e étape : $7,8^2 =$ ...., donc : .... $< \sqrt{60} <$ ....

4e étape : $7,7^2 =$ ...., donc : .... $< \sqrt{60} <$ ....

On a ainsi obtenu un ***encadrement d'amplitude (ou de précision) 0,1***.

7,7 est une valeur approchée .... de $\sqrt{60}$ à ....

7,8 est une valeur approchée .... de $\sqrt{60}$ à ....

Si on veut un encadrement plus précis, il faut continuer les calculs :

5e étape : $7,75^2 =$ ...., donc : .... $< \sqrt{60} <$ ....

6e étape : $7,74^2 =$ ...., donc : .... $< \sqrt{60} <$ ....

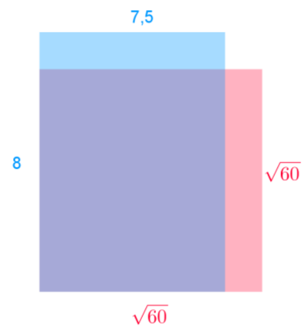
On a ainsi obtenu un ***encadrement d'amplitude (ou de précision) 0,01***.

7,74 est une valeur approchée .... de $\sqrt{60}$ à ....

7,75 est une valeur approchée .... de $\sqrt{60}$ à ....

c) Méthode de Héron d'Alexandrie (1er siècle après J.-C.)

Pour calculer par exemple $\sqrt{60}$:



- On part d'une valeur approchée de $\sqrt{60}$, par exemple $x_0 = 8$.
- On calcule

$$\frac{60}{x_0} = \frac{60}{8} = \frac{15}{2} = 7,5.$$

7,5 et 8 sont les côtés d'un rectangle d'aire 60 (voir figure).

- Comme 8 est une ***valeur approchée par excès*** de $\sqrt{60}$, $60:8 = 7,5$ en est une ***valeur approchée par défaut***, c.-à-d. $7,5 < \sqrt{60} < 8$.

- Pour obtenir une meilleure approximation de $\sqrt{60}$, on calcule la moyenne :

$$x_1 = \frac{7,5+8}{2} = 7,75$$

$x_1 = 7,75$ est une bonne approximation de $\sqrt{60}$, (obtenue déjà au point b).

Si on veut une valeur approchée encore plus précise, on recommence l'algorithme avec $x_1 = 7,75$. Remarquons que les calculs deviennent vite fastidieux.

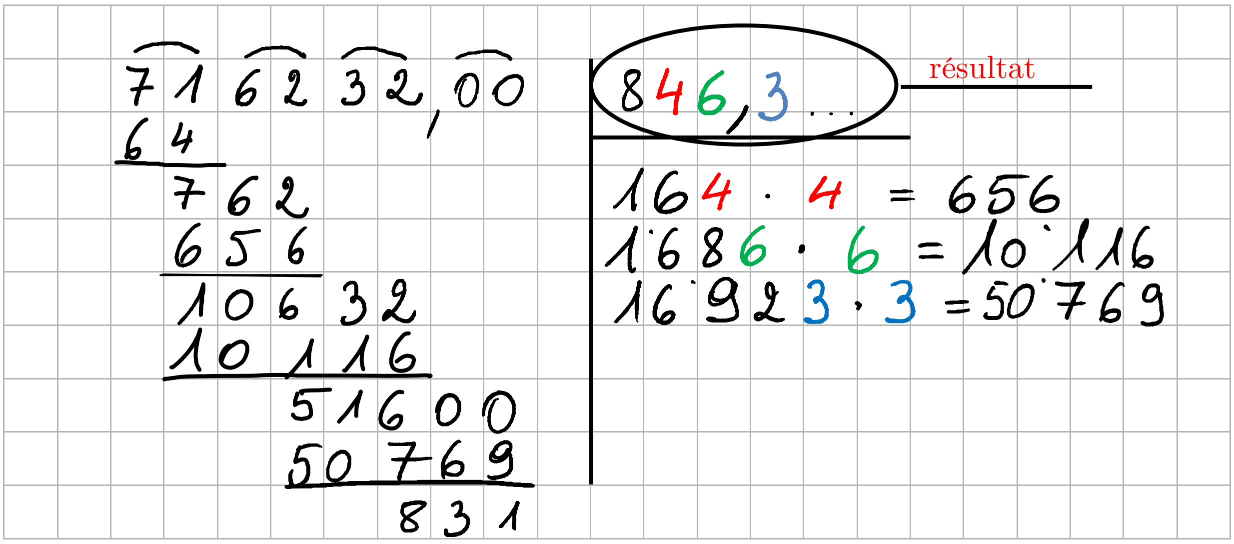
$$x_2 = \frac{x_1 + \frac{60}{x_1}}{2} = \frac{7,75 + \frac{60}{7,75}}{2} \approx 7,74596774... \quad (\text{calculatrice : } \sqrt{60} \approx 7,74596669...)$$

Résumé de la méthode de Héron :

- Choisir une valeur approchée x_0 de $\sqrt{a}$.
- Calculer $x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_0 + \dfrac{a}{x_0}\right)$, moyenne de x_0 et de $\dfrac{a}{x_0}$.
- Calculer $x_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + \dfrac{a}{x_1}\right)$, moyenne de x_1 et de $\dfrac{a}{x_1}$.
- Répéter l'algorithme autant de fois qu'on veut, jusqu'à la précision souhaitée.

d) Extraction à la main (schéma)

Exemple : $\sqrt{716'232} = ?$



Explications :

- Le nombre dont on cherche la racine carrée est découpé ***en tranches de 2 chiffres***, en partant de la virgule.
- 8 est le plus grand entier n tel que $n^2 \leq 71$ (1$^{\text{re}}$ tranche), c'est le 1$^{\text{er}}$ chiffre du résultat. Le reste est $71 - 64 = 7$. On abaisse la 2$^{\text{e}}$ tranche $\rightarrow$ 762.
- On ***double*** le résultat : $8 \cdot 2 = 16$ et on l'écrit à droite en bas. On cherche ensuite ***le plus grand chiffre*** x tel que $16x \cdot x \leq 762$. C'est 4, car $164 \cdot 4 = 656 < 762$ et $165 \cdot 5 = 825 > 762$. 4 est le chiffre suivant du résultat. Le reste est $762 - 656 = 106$. On abaisse la tranche suivante $\rightarrow$ 10'632.
- On ***double*** de nouveau le résultat : $84 \cdot 2 = 168$ et on l'écrit à droite en bas. On cherche ensuite ***le plus grand chiffre*** x tel que $1'68x \cdot x \leq 10'632$. C'est 6 et c'est le chiffre suivant du résultat. Le reste est 516. On abaisse la tranche suivante $\rightarrow$ 51'600.
- On répète l'algorithme jusqu'à la précision souhaitée.

3. Racine carrée d'un produit et d'un quotient

a) Racine carrée d'un ***produit*** :

$$\boxed{\left(\forall a,b \in \mathbb{R}_+\right) \qquad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}$$

Démonstration :

- $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont deux réels positifs, donc $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ est aussi un réel positif.
- Le carré de $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ est $a \cdot b$, car $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{a}^2 \cdot \sqrt{b}^2 = a \cdot b$
- Donc, d'après la définition : $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ CQFD

Exemples :

(1) $\sqrt{24} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

(2) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{15}$

(3) $\sqrt{3600} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{100} = 6 \cdot 10 = 60$

(4) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

(5) $\sqrt{60} = \sqrt{4 \cdot 15} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{15} = 2\sqrt{15}$

Application : ***simplifier la racine carrée d'un entier*** n :

- on cherche le ***plus grand carré parfait*** qui divise n. Par exemple :

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

- si on ne voit pas tout de suite le plus grand carré parfait qui divise n, on peut procéder par ***étapes*** :

$$\begin{aligned} \sqrt{72} &= \sqrt{9 \cdot 8} \\ &= 3 \cdot \sqrt{8} \\ &= 3 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} \\ &= 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

- on peut également utiliser la ***factorisation première*** de n :

$$\begin{aligned} \sqrt{72} &= \sqrt{2^3 \cdot 3^2} \\ &= \sqrt{2^3} \cdot \sqrt{3^2} \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \\ &= \sqrt{2} \cdot 2 \cdot 3 = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Habituez-vous à faire ***toujours*** cette simplification. Elle est par exemple nécessaire pour ***réduire une somme de termes comportant des radicaux*** :

Exemple : $\sqrt{45} + \sqrt{80} = \sqrt{9 \cdot 5} + \sqrt{16 \cdot 5} = 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$

b) Racine carrée d'un ***quotient*** :

$$\left(\forall a \in \mathbb{R}_+\right)\left(\forall b \in \mathbb{R}_+^*\right) \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Démonstration :

- $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont deux réels positifs, donc $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ est aussi un réel positif.
- Le carré de $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ est $\frac{a}{b}$, car $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\sqrt{a}^2}{\sqrt{b}^2} = \frac{a}{b}$
- Donc, d'après la définition : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ CQFD

Exemples :

(1) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2$

(2) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{15}} = \sqrt{3}$

(3) $\sqrt{27} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{27 \cdot 5}{9}} = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15}$

Attention : $\frac{\sqrt{6}}{2} \neq \sqrt{\frac{6}{2}}$

4. Racine carrée d'une puissance

$$\left(\forall a \in \mathbb{R}_+^*\right)\left(\forall n \in \mathbb{Z}\right) \qquad \sqrt{a^n} = \sqrt{a}^n$$

Démonstration :

Posons : $b = \sqrt{a}^n$. C'est un réel positif et $b^2 = \left(\sqrt{a}^n\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^{2 \cdot n} = \left(\sqrt{a}^2\right)^n = a^n$.

Par définition b est donc la racine carrée de a^n, c.-à-d. $\sqrt{a}^n = \sqrt{a^n}$. CQFD

Simplifions maintenant $\sqrt{a^n} = \sqrt{a}^n$, pour un réel $a \geq 0$.

Exposant pair

$\sqrt{a}^2 = \sqrt{a^2} = a$

$\sqrt{a}^4 = \sqrt{a^4} = a^2$, car $\left(a^2\right)^2 = a^4$

$\sqrt{a}^6 = \sqrt{a^6} = a^3$, car $\left(a^3\right)^2 = a^6$

$\sqrt{a}^8 = \sqrt{a^8} = a^4$, car $\left(a^4\right)^2 = a^8$

Exposant impair

$\sqrt{a}^3 = \sqrt{a^3} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} = a\sqrt{a}$

$\sqrt{a}^5 = \sqrt{a^5} = \sqrt{a^4} \cdot \sqrt{a} = a^2\sqrt{a}$

$\sqrt{a}^7 = \sqrt{a^7} = \sqrt{a^6} \cdot \sqrt{a} = a^3\sqrt{a}$

$\sqrt{a}^9 = \sqrt{a^9} = \sqrt{a^8} \cdot \sqrt{a} = a^4\sqrt{a}$

Exemples :

Avec des exposants positifs :

- $\sqrt{10'000} = \sqrt{10^4} = 10^2 = 100$
- $\sqrt{7^5} = \sqrt{7^4} \cdot \sqrt{7} = 7^2\sqrt{7} = 49\sqrt{7}$
- $\sqrt{1024} = \sqrt{2^{10}} = 2^5 = 32$
- $\sqrt{5}^{13} = \sqrt{5}^{12} \cdot \sqrt{5} = 5^6 \cdot \sqrt{5}$

Avec des exposants négatifs :

- $\sqrt{2^{-8}} = 2^{-4} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$
- $\sqrt{3}^{-7} = \sqrt{3}^{-6} \cdot \sqrt{3}^{-1} = 3^{-3} \cdot \sqrt{3}^{-1} = \dfrac{1}{27\sqrt{3}}$
- ou bien : $\sqrt{3}^{-7} = \sqrt{3}^{-8} \cdot \sqrt{3} = 3^{-4} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{81}$

5. Racine carrée d'une somme, d'une différence

Contre-exemples :

$$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \text{, mais}$$
$$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$$

Donc : $\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$.

$$\sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4 \text{, mais}$$
$$\sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$$

Donc : $\sqrt{25-9} \neq \sqrt{25} - \sqrt{9}$.

Retenons qu'en général :

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$
$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

De même :

$$\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$$
$$\sqrt{a^2-b^2} \neq a-b$$

Il n'y a ***pas de formules sur les radicaux avec + ou –*** !

Conséquence importante : Dans une somme de radicaux, on peut seulement additionner des termes avec des ***racines carrées identiques***, par exemple :

$$8\sqrt{5} - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} = 6\sqrt{5} - \sqrt{2}$$

6. Comparaison d'expressions contenant des radicaux

On a :

$$\boxed{(\forall a, b \in \mathbb{R}_+) \qquad \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Leftrightarrow a \leq b}$$

Donc par exemple : $\sqrt{6} < \sqrt{7}$, $\sqrt{30} < \sqrt{40}$, $\sqrt{12} > \sqrt{5}$ etc.

Exemples plus difficiles :

(1) ***Comparer*** : 7 et $4\sqrt{3}$

Méthode 1: on écrit les nombres sous forme de radicaux :

$7 = \sqrt{7^2} = \sqrt{49}$ et $4\sqrt{3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{48}$, donc :

$$7 > 4\sqrt{3}$$

Méthode 2: on compare le signe et les carrés des deux nombres :

7 et $4\sqrt{3}$ sont deux réels positifs et $7^2 = 49$ et $\left(4\sqrt{3}\right)^2 = 16 \cdot 3 = 48$, donc :

$$7 > 4\sqrt{3}$$

(2) ***Comparer*** : $2 - \sqrt{5}$ et $\sqrt{2}$

On remarque que $2 - \sqrt{5} < 0$ et $\sqrt{2} > 0$, donc :

$$2 - \sqrt{5} < \sqrt{2}$$

(3) ***Comparer*** : $\sqrt{6} - 2$ et $\sqrt{2}$

On remarque que les deux nombres sont positifs.

Méthode 3 : on écrit des inégalités équivalentes

On part d'une inégalité dont on ne sait pas si elle est vraie ou fausse (on devine le signe $<$ ou $>$) :

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\sqrt{6} - 2}_{+} < \underbrace{\sqrt{2}}_{+} \qquad /(\ )^2 \\
\Leftrightarrow\ & \left(\sqrt{6} - 2\right)^2 < \sqrt{2}^2 \\
\Leftrightarrow\ & 6 - 2\sqrt{6} \cdot 2 + 4 < 2 \\
\Leftrightarrow\ & 10 - 4\sqrt{6} < 2 \\
\Leftrightarrow\ & 10 - 2 < 4\sqrt{6} \\
\Leftrightarrow\ & 8 < 4\sqrt{6} \qquad /:4 \\
\Leftrightarrow\ & 2 < \sqrt{6} \quad \text{VRAI !}
\end{aligned}$$

Elever au carré est seulement permis lorsque les deux membres sont positifs !!

Donc : $\sqrt{6} - 2 < \sqrt{2}$

Si on aboutit à un résultat FAUX, il faut bien sûr changer le signe de comparaison dans la conclusion ($<$ devient $>$ ou inversement) (cf. exercices).

7. Expressions contenant des radicaux au dénominateur

On amplifie les fractions de façon à ce que le dénominateur ne contienne plus de $\sqrt{\ }$.
On dit qu'on ***rend entier (ou rationnel) le dénominateur***.

Exemples simples :

(1) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ amplifier par $\sqrt{5}$

(2) $\dfrac{6}{5\sqrt{2}}=\dfrac{6\cdot\sqrt{2}}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{6\sqrt{2}}{5\cdot 2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$ amplifier par $\sqrt{2}$

Exemples où le dénominateur contient une somme ou une différence

(3)
$$\frac{2}{3-\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\left(3+\sqrt{2}\right)}{\left(3-\sqrt{2}\right)\cdot\left(3+\sqrt{2}\right)}=\frac{6+2\sqrt{2}}{3^2-\sqrt{2}^2}=\frac{6+2\sqrt{2}}{9-2}=\frac{6+2\sqrt{2}}{7}$$

amplifier par l'***expression conjuguée***,
ici : $3+\sqrt{2}$

(4)
$$\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{4\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}=\frac{4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{6-2}=\frac{\cancel{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\cancel{4}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

amplifier par l'***expression conjuguée***,
ici : $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

Remarque : Rendre rationnel les dénominateurs est ***nécessaire*** par exemple pour pouvoir ***réduire des sommes de termes contenant des radicaux***.

Exemple :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{27}-5\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2}+3\sqrt{3}-5\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}-2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{6\sqrt{3}}{3}=-\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

8. Equation $x^2 = a$

Exemples :

(1) $\quad x^2 = 3$

Résolution par différence de deux carrés

$$\begin{aligned}
& x^2 = 3 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 3 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Résolution par extraction de $\sqrt{\ }$

$$\begin{aligned}
& x^2 = 3 \\
\Leftrightarrow\ & x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$S = \{\pm\sqrt{3}\} \quad \rightarrow \quad \textit{2 solutions}$$

(2) $\quad x^2 = -7$, impossible car ***un carré est toujours*** ≥ 0

(3) $\quad x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$S = \{0\} \quad \rightarrow \quad \textit{1 solutions}$$

En général :

L'équation $x^2 = a$

- admet ***deux solutions distinctes*** $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ si $a > 0$
- admet ***1 solution*** 0 si $a = 0$
- n'admet ***aucune solution*** si $a < 0$

Exemples plus difficiles :

(4) $\quad 2\left(x+5\right)^2 = 7$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & \left(x+5\right)^2 = \tfrac{7}{2} \\
\Leftrightarrow\ & x+5 = \pm\sqrt{\tfrac{7}{2}} \\
\Leftrightarrow\ & x = -5 \pm \sqrt{\tfrac{7}{2}}
\end{aligned}$$

$$S = \{-5-\sqrt{\tfrac{7}{2}}, -5+\sqrt{\tfrac{7}{2}}\}$$

(5) $\quad \underbrace{x^2 + 4x}_{\text{début d'un trinôme carré parfait}} \ + 7 = 0$

méthode du complément quadratique

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & \underbrace{x^2 + 4x + 4}_{\text{trinôme carré parfait}} + 3 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(x+2\right)^2 + 3 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(x+2\right)^2 = -3, \text{ impossible}
\end{aligned}$$

$$S = \varnothing$$