CHAPITRE I

ENSEMBLES

COURS

COURS

1) Ensembles – éléments

- ***Exemples***

L'*ensemble* des chiffres inférieurs ou égaux à 6 $=\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$

L'*ensemble* des nombres impairs plus petits que 14 $=\{1;3;5;7;9;11;13\}$

L'*ensemble* des voyelles minuscules de l'alphabet $=\{a;o;u;i;e;y\}$

L'*ensemble* des élèves de notre classe

L'*ensemble* des pays de l'Union Européenne

L'*ensemble* des points d'une droite

L'*ensemble* des triangles rectangles

L'*ensemble* des fractions dont le dénominateur vaut 3

L'*ensemble* des ……………………………………………………………………

L'*ensemble* des ……………………………………………………………………

L'*ensemble* des ……………………………………………………………………

L'*ensemble* des …………………………………………………………………….

- ***Définition***

Un ***ensemble*** est une collection d'objets clairement définis appelés ***éléments*** de cet ensemble.

Attention :

On ne peut pas dire par exemple : « l'ensemble des grands nombres » ou « l'ensemble des gens intelligents » etc car il n'est pas clair quels seraient les éléments de ces « ensembles » !

- ***Notations***

➢ Les ensembles sont notés par des lettres, le plus souvent majuscules : *A*, *B*, *C*, *D*, … Les éléments de l'ensemble sont alors *énumérés* entre **accolades { }** (énumérer = aufzählen).

Exemples :

$$A=\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$$
$$B=\{1;3;5;7;9;11;13\}$$

On dit que ces ensembles sont définis ***par énumération*** ou ***en extension***.

- Quand le nombre des éléments d'un ensemble est très grand ou même infini (unendlich) on ne peut pas les énumérer tous. Pour définir un tel ensemble on donne une *propriété* de ses éléments qui permet de *comprendre* quels sont ces éléments : on dit alors que l'ensemble est ***défini en compréhension***.

  Exemples : $L = \{\text{voitures immatriculées au Luxembourg au 1.1.2016}\}$

  $M = \{\text{entiers naturels inférieurs à 9000}\}$

  $E = \{\text{nombres décimaux compris entre 5 et 7}\}$ [1]

  De manière *plus rigoureuse* on peut écrire aussi p. ex. :

  $M = \{x \,/\, x \text{ est un entier naturel inférieur à 9000}\}$

  et on lit : « *M est l'ensemble* ***des éléments x tel que*** *x est un nombre entier inférieur à 9000* ».

- Certains ensembles peuvent être définis par énumération et en compréhension.

  Exemples : $G = \{x \,/\, x \text{ est un nombre pair compris entre 8 et 17}\}$

  $= \{\text{..}\}$

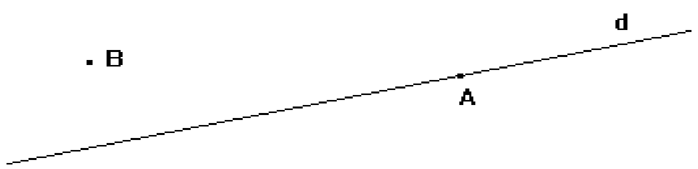
  $K = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$

  $= \{x \,/\, \text{..}\}$

Exercices 1, 2, 3

- ***<u>Les symboles</u>*** $\in$ ***<u>et</u>*** $\notin$

  - Nous avons déjà rencontré ces symboles en géométrie. Si on a par exemple :



  on écrit : $A \in d$ pour dire que le point A est sur la droite d et $B \notin d$ pour dire que le point B n'est pas sur la droite d !

  - De même on utilise ces symboles pour n'importe quel ensemble, par exemple si $E = \{5;\ 9;\ 12\}$ on écrit : $5 \in E$, $9 \in E$ et $12 \in E$, mais $8 \notin E$, $2{,}91 \notin \mathrm{E}$, etc.

---

[1] « ***compris entre*** » veut dire en général que les <u>bornes sont incluses</u>, sinon on dit plutôt « ***compris strictement entre*** »

➢ <u>*Définition*</u>

Pour tout ensemble E et tout élément x :

- si x est un élément de E, on écrit $x \in E$ et on *lit* : « x ***appartient*** *à E* »
- si x n'est pas un élément de E, on écrit $x \notin E$ et on lit : « x ***n'appartient pas*** *à E* »)

Exercice 4

• <u>*Ensembles égaux*</u>

Définition. Deux ensembles sont ***égaux*** s'ils ont les mêmes éléments.

Exemples : Parmi les ensembles suivants, quels sont ceux qui sont égaux ? différents ?

$A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$

$B = \{1;\ 4;\ 5;\ 7\}$

$C = \{3;\ 1;\ 4;\ 2\}$

$D = \{4;\ 1;\ 4;\ 7;\ 5;\ 4;\ 7\}$

....

....

Exercice 5

• <u>*Ensemble vide*</u>

Il existe un seul ensemble qui n'a aucun élément et qu'on appelle ***ensemble vide***. Il est noté $\varnothing$.

Exemple : $A = \{x\ /\ x \text{ est un élève de notre classe qui mesure plus de 3 m}\} = \varnothing$

Trouvez deux autres exemples d'ensemble vide :

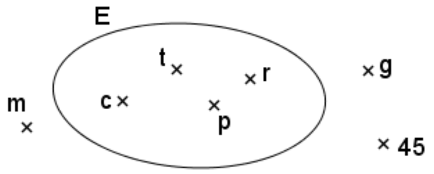
....

....

2) Diagrammes de Venn

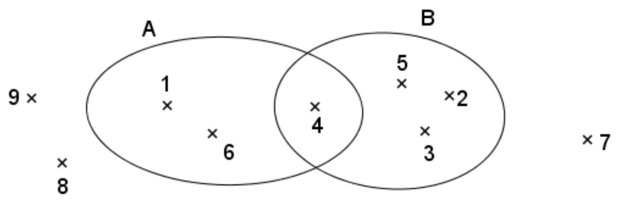
- Pour représenter **un** ensemble on dessine une *ligne fermée* appelée ***diagramme de Venn*** et on met les éléments de l'ensemble à l'intérieur de cette ligne, les autres à l'extérieur.

  Exemple : $E = \{c;\ t;\ r;\ p\}$



- Pour représenter **deux** ensembles sur un même diagramme de Venn, il faut prévoir un endroit pour les éléments qui appartiennent aux deux ensembles à la fois, pour les éléments qui n'appartiennent qu'à un seul des deux ensembles et pour ceux qui n'appartiennent à aucun des deux ensembles. Chaque élément ne doit en effet figurer qu'une seule fois sur un diagramme !

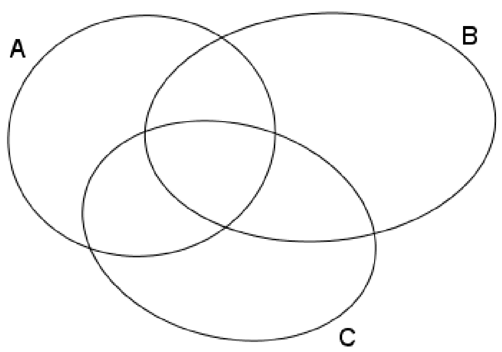
  Exemple : $A = \{1;\ 4;\ 6\}$ et $B = \{2;\ 3;\ 4;\ 5\}$



- Pour représenter **trois** ensembles sur un même diagramme, on dessine un « diagramme en trèfle » qui permet de prévoir tous les cas : il y en a 8 en tout ! (essayez de les décrire…)

  Exemple : $A = \{1;\ 2;\ 5;\ 7;\ 9\}$, $B = \{4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 9;\ 10\}$ et $C = \{1;\ 3;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10\}$

  Placez vous-mêmes les entiers de 0 à 12 sur le diagramme suivant :



Exercices 6, 7, 8

3) Sous-ensembles

- ***Exemple***

  Soient les ensembles $R = \{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$ et $S = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$.

  En comparant les éléments de ces deux ensembles, on constate que :

  ………………………………………………………………………………………

  ………………………………………………………………………………………

  Dessinons un diagramme aussi simple que possible qui représente les deux ensembles, ***en tenant compte de la remarque que nous venons de faire*** !

- ***Définition***

  Si *tous* les éléments d'un ensemble E sont aussi des éléments d'un ensemble F, on dit que E est un ***sous-ensemble*** de F ou une ***partie*** de F ou encore que E est ***inclus*** dans F.

- ***Notation***

  Si E est un sous-ensemble de F on *écrit* : $E \subset F$ et on *lit* : « E ***est inclus dans*** F ».

  Si E n'est pas un sous-ensemble de F (c'est-à-dire si E a au moins un élément qui n'appartient pas à F), on *écrit* : $E \not\subset F$ et on *lit* : « E ***n'est pas inclus dans*** F ».

- L'ensemble vide est inclus dans tout ensemble E : $\boxed{\varnothing \subset E}$

- Chaque ensemble est inclus dans lui-même : $\boxed{E \subset E}$

- ***Attention :***

  Les symboles $\in$ et $\notin$ *se trouvent entre un élément et un ensemble alors que les symboles* $\subset$ et $\not\subset$ *sont mis entre deux ensembles !*

Exercices 9 à 15

4) Ensembles de nombres

- Nous connaissons différentes *sortes* de nombres :
  - 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; … sont des nombres ***entiers naturels***
  - …. ;-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ….. sont des nombres ***entiers relatifs***
  - 5,79 ; 8,031 ; -4,6 ; …… sont des ***nombres décimaux***
  - $\frac{7}{3}$; $-\frac{3}{2}$; $\frac{15}{5}$; ….. sont des ***nombres rationnels ou fractions***
- On définit alors les <u>ensembles de nombres</u> suivants :

  $\mathbb{N} = \{\text{nombres entiers naturels}\} = \{0,1,2,3,4,5,...\}$

  $\mathbb{Z} = \{\text{entiers relatifs}\} = \{...-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...\}$

  $\mathbb{D} = \{\text{nombres décimaux}\}$

  $\mathbb{Q} = \{\text{nombres rationnels}\}$
- Propriétés :
  - Tout entier naturel est aussi un entier relatif, donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
  - $5 = 5,0$ et $-7 = -7,0$ donc tout nombre entier relatif est aussi un nombre décimal, donc $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.
  - $3,7 = \frac{37}{10}$; $23 = \frac{23}{1}$; $-2,54 = -\frac{254}{100}$ donc tout nombre décimal est aussi un nombre rationnel, donc $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

  Donc : $\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}}$

  Dessinons ces quatre ensembles sur un même diagramme :

Exercices 16, 17, 18

5) Intersection, réunion et différence de deux ensembles

- **<u>Exemple</u>**

Représentez sur un même diagramme les deux ensembles :

$A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ et $B = \{4; 5; 6; 7\}$

Placez sur ce diagramme les éléments 13 et 29,5.

On constate que sur ce diagramme il y a quatre sortes d'éléments, ceux qui appartiennent :

- à A ***et*** à B : ………………….……………
- à A ***mais pas*** à B : ………..…………….
- à B ***mais pas*** à A : ……..……………….
- ***ni à*** A, ***ni à*** B : ………………………….

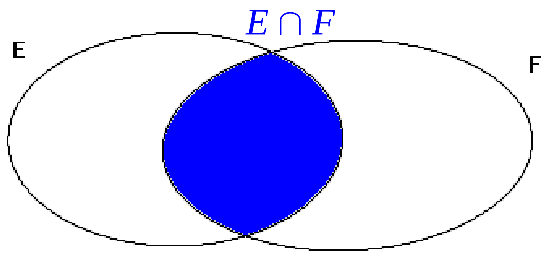
Combien existe-t-il d'éléments qui n'appartiennent ni à A, ni à B ?……………….

Ici les éléments intéressants sont ceux qui appartiennent à A ***ou*** à B : ……………..

- **Intersection de deux ensembles**

<u>Définition</u>. Soient deux ensembles E et F, l'ensemble des éléments qui appartiennent à E ***et*** à F est appelé ***intersection*** de E et de F et est noté $E \cap F$.

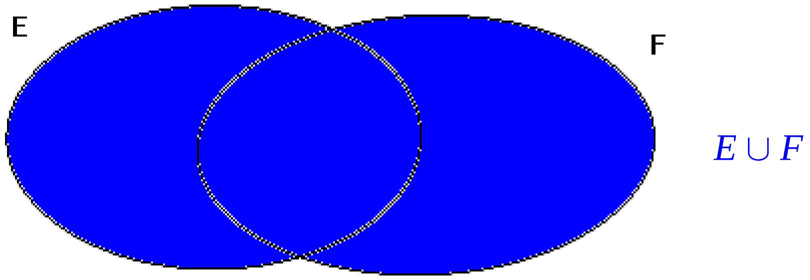
Ainsi : $E \cap F = \{x /\ x \in E \ et \ x \in F\}$



Pour notre exemple : $A \cap B = \{...............\}$

- **Réunion de deux ensembles**

Définition. Soient deux ensembles E et F, l'ensemble des éléments qui appartiennent à E ***ou*** à F est appelé ***réunion*** de E et de F et est noté $E \cup F$. Ainsi : $E \cup F = \{x /\ x \in E \text{ ou } x \in F\}$

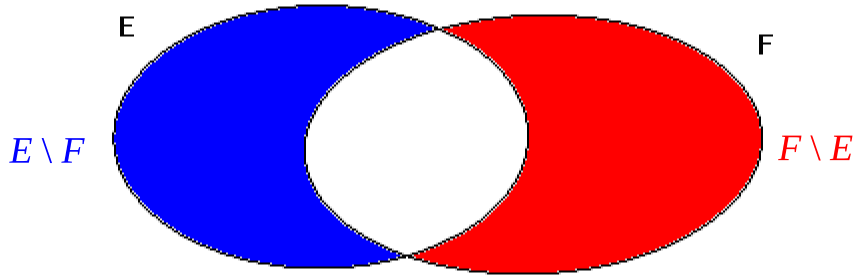


Pour notre exemple : $A \cup B = \{...\}$

- **Différence de deux ensembles**

Définition. Soient deux ensembles E et F, l'ensemble des éléments qui appartiennent à E ***et*** qui n'appartiennent pas à F est appelé ***différence*** de E et de F et est noté $E \setminus F$. Ainsi : $E \setminus F = \{x / x \in E \text{ et } x \notin F\}$

De même : $\boxed{F \setminus E = \{x / x \in F \text{ et } x \notin E\}}$



Propriété *:*

$E \setminus F$ et $F \setminus E$ n'ont aucun élément commun, donc $(E \setminus F) \cap (F \setminus E) = ...$

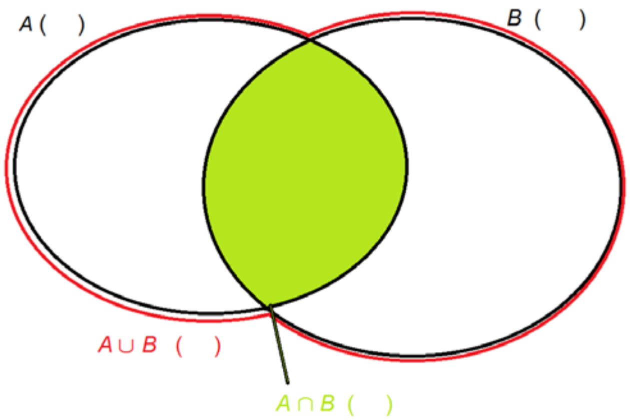
Pour notre exemple : $A \setminus B = \{...................\}$ et $B \setminus A = \{...................\}$

Exercices 19 à 33

6) Cardinal d'un ensemble

- ***Exemple*.**

Soit les ensembles $A=\{1;\ 2;\ 5;\ 8;\ 9;\ 12;\ 13\}$ et $B=\{2,3,4,5,8,10,11,17\}$. Complétez le diagramme de Venn ci-dessous avec les ensembles *A*, *B*, $A\cap B$ et $A\cup B$. Ecrivez entre ( ) ***le nombre d'éléments*** de chaque ensemble :



- ***Définition***

Le cardinal d'un ensemble ***fini*** A est le nombre d'éléments de cet ensemble. Il est noté $\operatorname{card} A$ ou $\lvert A\rvert$.

Dans l'exemple ci-dessus :

$\operatorname{card} A = \ldots\ldots$ $\qquad$ $\operatorname{card} B = \ldots\ldots$ $\qquad$ $\operatorname{card}(A\cap B) = \ldots\ldots$ $\qquad$ $\operatorname{card}(A\cup B) = \ldots\ldots$

- ***Formules (dans le cas d'ensembles finis)***

a) Exprimez $\operatorname{card}(A\cup B)$ ***en fonction de*** $\operatorname{card} A$, $\operatorname{card} B$ et $\operatorname{card}(A\cap B)$:

$\operatorname{card}(A\cup B) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

A quelle condition a-t-on : $\operatorname{card}(A\cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B$?

Si ……………….. alors $\operatorname{card}(A\cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B$

b) Exprimez $\operatorname{card}(A\setminus B)$ en fonction de $\operatorname{card} A$ et $\operatorname{card}(A\cap B)$:

$\operatorname{card}(A\setminus B) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

A quelle condition a-t-on : $\operatorname{card}(A\setminus B) = \operatorname{card} A - \operatorname{card} B$?

Si ……………….. alors $\operatorname{card}(A\setminus B) = \operatorname{card} A - \operatorname{card} B$

Exercices 34 à 45

EXERCICES

1) Ecrivez les ensembles suivants en extension (par énumération) :

$A = \{x \,/\, x \text{ est une lettre du mot "MATHEMATIQUES"}\}$

$B = \{x \,/\, x \text{ est un entier et } 12 \leq x < 17\}$

$C = \{x \,/\, x \text{ est un entier impair et } 23 < x \leq 34\}$

$D = \{x \,/\, x \text{ est un entier et } \frac{5}{3} \leq x \leq \frac{47}{7}\}$

$E = \{x \,/\, x \text{ est un entier et } -7 < x < 2\}$

$F = \{x \,/\, x \text{ est un entier positif et } x + 5 < 11\}$

$G = \{x \,/\, 3x - 5 = 16\}$

$H = \{x \,/\, x \text{ est un continent dont la première lettre est un "A"}\}$

$I = \{x \,/\, x \text{ est un nombre naturel qui divise } 24\}$

$J = \{x \,/\, x \text{ est un entier négatif et } x + 8 > 3\}$

$K = \{x \text{ est un nombre naturel à deux chiffres qui se termine par } 3\}$

$L = \{x \,/\, x \text{ est une lettre du mot "marmotte"}\}$

$M = \{x \,/\, x \text{ est un entier naturel pair et } x < 7\}$

$N = \{x \,/\, x \text{ est un entier positif et } 12 - 3x > 0\}$

$O = \{x \,/\, x \in \mathbb{N} \text{ et } 4 < x \leq 10\}$

$P = \{x \,/\, x \in \mathbb{N} \text{ et } x - 3 < 13\}$

$Q = \{x \,/\, x \in \mathbb{N} \text{ et } 2x - 13 \leq 0\}$

$R = \{x \,/\, x \text{ est une lettre du mot "ABRACADABRA"}\}$

$S = \{x \,/\, x \text{ est un entier divisible par 3 et } -\frac{16}{5} \leq x < \frac{89}{9}\}$

2) Ecrivez les ensembles suivants en compréhension :

$A = \{6;\ 8;\ 10;\ 12;\ 14;\ 16;\ 18\}$

$B = \{\text{C; E; I; R; X}\}$

$C = \{41;\ 43;\ 45;\ 47;\ 49;\ 51;\ 53\}$

$D = \{\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{7}\}$

$E = \{27, 29, 31, 33, 35, 37, 39\}$

$F = \{\text{B, E, L, M, N, S}\}$

$G = \{7, 9, 11, 13\}$

$H = \{9, 27, 15, 3, 21\}$

$I = \{\text{février, juin, mars, janvier, avril, mai}\}$

$J = \{16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80\}$

$K = \{x \,/\, x \text{ est un homme qui pèse 2 tonnes}\}$

$L = \{40, 39, 38, 36, 35, 34, 33\}$

$M = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

$N = \{-\frac{7}{5}, -\frac{6}{5}, -1, -\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}\}$

$P = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

3) On donne $C=\left\{\frac{2}{5};\ \frac{2}{7};\ \frac{2}{9};\ \frac{2}{11};\ \frac{2}{13}\right\}$.

a) Ecrivez l'ensemble C en **compréhension**.

b) Ecrivez en **extension** l'ensemble $D=\left\{x\,/\,x\in C \text{ et } x<\frac{2}{9}\right\}$.

4) Soit $P=\{3;\ 5;\ 6;\ 9;\ 11\}$ et $Q=\{1;\ 3;\ 7;\ 8;\ 10\}$. Complétez par $\in$, $\notin$, P ou Q :

$5\ldots P$	$11\ldots Q$	$8\ldots P$	$9\in\ldots$
$1\ldots P$	$58\ldots P$	$3\in\ldots$	$10\notin\ldots$

5) Déterminez x et y pour que $I=J$ avec :

a) $I=\{5;\ 2;\ 8;\ 5;\ 8\}$ et $J=\{5;\ 8;\ x\}$

b) $I=\{\text{a};\ \text{b};\ x;\ \text{a};\ \text{c}\}$ et $J=\{\text{b};\ \text{d};\ y;\ \text{b};\ \text{a}\}$

c) $I=\{19;\ x;\ y\}$ et $J=\{25;\ 19;\ 7;\ 25;\ 19\}$

6) Dessinez un diagramme de Venn qui représente les ensembles $M=\{2;\ 5;\ 7;\ 8;\ 9\}$ et $N=\{3,4,6\}$, puis placez les chiffres de 0 à 9 sur ce diagramme.

7) Dessinez un diagramme de Venn qui représente les deux ensembles $A=\{2;\ 4;\ 7;\ 9;\ 13\}$ et $B=\{1;\ 3;\ 4;\ 6;\ 7;\ 11\}$.

8) Dessinez un diagramme de Venn qui représente les trois ensembles $A=\{\text{m};\ \text{p};\ \text{k};\ \text{f};\ \text{t};\ \text{y};\ \text{q}\}$, $\text{B}=\{\text{d};\ \text{f};\ \text{g};\ \text{t};\ \text{o};\ \text{p};\ \text{q};\ \text{t}\}$ et $C=\{\text{f};\ \text{e};\ \text{q};\ \text{m};\ \text{p};\ \text{r};\ \text{s}\}$.

9) Soient les ensembles $K=\{0;\ 5;\ 7\}$, $L=\{4;\ 5;\ 6;\ 7\}$ et $M=\{0;\ 2;\ 3;\ 5;\ 6;\ 7\}$.
Complétez par $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$:

$K\ldots M$	$5\ldots K$	$K\ldots L$	$M\ldots K$
$\varnothing\ldots M$	$9\ldots L$	$0\ldots\varnothing$	$L\ldots M$
$\{2;\ 5\}\ldots M$	$\{6\}\ldots L$	$6\ldots L$	$\{5;\ 6\}\ldots K$

10) Trouvez *tous* les ensembles X tel que :

a) $X\subset\{3\}$

b) $X\subset\{4;\ 7\}$

c) $X\subset\{\text{a};\ \text{b};\ \text{c}\}$

d) $\{1;2\}\subset X\subset\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$

e) $X\subset\{\text{b, c, d, e}\}$ et $X\subset\{\text{a, b, c}\}$.

f) $X\not\subset\{\text{b, c, d, e}\}$ et $X\subset\{\text{a, b, c}\}$.

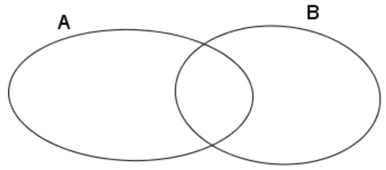
11) Déterminez tous les sous-ensembles des ensembles

a) $A=\{1\}$ **b)** $B=\{1,2\}$ **c)** $C=\{1,2,3\}$ et **d)** $D=\{1,2,3,4\}$

Sans les énumérer tous, combien de sous-ensembles possède $E=\{1,2,3,4,5\}$?

12) Dessinez sur un même diagramme (aussi simple que possible !) les ensembles suivants : $A=\{8;\ 13\}$, $B=\{8;\ 9;\ 13;\ 24;\ 30\}$ et $C=\{8;\ 13;\ 24\}$.

13) Sur le diagramme ci-contre, hachurez ***les parties vides*** :



a) si $A \subset B$

b) si $B \subset A$

c) si $A = B$

14) Dessinez sur un même diagramme les ensembles suivants :

a) $E = \{\text{d; o; p; j}\}$ et $F = \{\text{q; m; o; t; d}\}$

b) $P = \{4;\ 5;\ 6;\ 9;\ 12\}$, $Q = \{5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 12\}$ et $R = \{1;\ 3;\ 4;\ 5;\ 8;\ 12\}$

c) $S = \{0;1;2;3;4\}$, $T = \{2;3;4;5;6;7\}$, $U = \{0;3;4;5;8\}$ et $W = \{x\ /\ x \in \mathbb{N} \text{ et } x < 11\}$

15) Représentez par un seul diagramme de Venn et le plus simplement possible les ensembles :

$A = \{\text{animaux}\}$, $B = \{\text{plantes}\}$, $C = \{\text{légumes}\}$, $D = \{\text{chiens}\}$, $E = \{\text{Milou}\}$

(Milou est le nom du chien de Tintin)

16) Complétez par $\in$ ou $\notin$:

$745 \ldots \mathbb{N}$	$\dfrac{6}{2} \ldots \mathbb{N}$	$-9 \ldots \mathbb{N}$	$-9478 \ldots \mathbb{Z}$
$3,2 \ldots \mathbb{Z}$	$-\dfrac{21}{3} \ldots \mathbb{Z}$	$27 \ldots \mathbb{Z}$	$-65,07 \ldots \mathbb{D}$
$\dfrac{7}{5} \ldots \mathbb{D}$	$-47 \ldots \mathbb{Q}$	$-\dfrac{1}{3} \ldots \mathbb{D}$	$\dfrac{11}{13} \ldots \mathbb{Q}$

17) Dessinez sur un même diagramme les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$ et les nombres :

$$\frac{22}{11};\ 0\ ;\ -75;\ \frac{3}{7};\ 129\ ;\ \frac{6}{3}\ ;\ \frac{3}{4}\ ;\ -3,81\ ;\ -\frac{8}{5}\ ;\ -\frac{11}{3}$$

18) Ecrivez les ensembles suivants en extension (par énumération) :

$A = \{x\ /\ x \in \mathbb{Z} \text{ et } -3 \leq x < 5\}$

$B = \left\{x\ /\ x \in \mathbb{N} \text{ et } \dfrac{9}{7} \leq x \leq \dfrac{53}{9}\right\}$

$C = \{x\ /\ x \in \mathbb{N} \text{ et } x \leq -7\}$

$D = \{x\ /\ x \in \mathbb{Z} \text{ et } x \text{ est divisible par 4 et } -20 \leq x \leq 10\}$

19) Soient les ensembles $A = \{1;\ 2;\ 4;\ 5\}$ et $B = \{2;\ 3;\ 5;\ 6;\ 7\}$.

a) Diagramme de Venn.

b) Ecrivez en extension : $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ et $B \setminus A$.

c) Ecrivez toutes les inclusions possibles entre les ensembles : A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ et $B \setminus A$.

20) On donne les trois ensembles :

$$K = \{a, b, c, d, e, f, g, h\},\ L = \{d, f, h, j, k, p\},\ M = \{b, f, h, p, s, w\}$$

Recopiez et complétez par $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$:

$f \ldots L$ $\quad$ $K \cap M \ldots M$ $\quad$ $\{j\} \ldots L \cup K$ $\quad$ $M \ldots K$ $\quad$ $\varnothing \ldots M$

$L \ldots L$ $\quad$ $L \cup K \ldots K$ $\quad$ $\{f, p\} \ldots L \cap M$ $\quad$ $\{s, h\} \ldots M$ $\quad$ $p \ldots L \setminus M$

21) On donne $A = \{a, b, d, e, f\}$ et $B = \{b, c, d, e, g\}$. Complétez par $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$:

$c \ldots A \cup B$ $\quad$ $f \ldots A \setminus B$ $\quad$ $\{b, c, d\} \ldots A$ $\quad$ $\{d, g, e\} \ldots B$

$\{\ \} \ldots A$ $\quad$ $A \cup B \ldots A \cap B$ $\quad$ $A \ldots A \cap B$ $\quad$ $i \ldots A$

22) Soient $A = \{3; 4; 5; 7; 9; 17\}$, $B = \{0; 3; 4; 8; 9; 10\}$ et $C = \{0; 3; 4; 7; 10; 13\}$.

a) Diagramme de Venn.

b) Déterminez les ensembles suivants :

$A \cap B$ $\quad$ $B \cap C$ $\quad$ $A \cap C$

$A \cup B$ $\quad$ $B \cup C$ $\quad$ $A \cup C$

$A \setminus C$ $\quad$ $B \setminus A$ $\quad$ $(A \cap B) \cap C$

$A \cap (B \cap C)$ $\quad$ $(A \cup B) \setminus C$ $\quad$ $B \setminus (A \cup C)$

$A \setminus (B \setminus C)$ $\quad$ $A \cup B \cup C$ $\quad$ $(A \setminus B) \setminus C$

$A \cup (B \cap C)$ $\quad$ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

$D = \{x \,/\, x \in A \text{ et } x \in B \text{ et } x \notin C\}$ $\quad$ $E = \{x \,/\, x \notin A \text{ et } x \notin B \text{ et } x \in C\}$

23) Etudiez à l'aide de diagrammes de Venn si les propriétés suivantes sont vraies ou non. Si oui, comment appelle-t-on la propriété ?

a) $A \cap B = B \cap A$

b) $A \cup B = B \cup A$

c) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

d) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

e) $A \setminus B = B \setminus A$

f) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

g) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

h) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

i) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

j) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

24) Que peut-on dire de deux ensembles A et B si $A \setminus B = \varnothing$?

25) On sait que $A \cap B = \varnothing$ (figure). Quel est dans ce cas $A \setminus B$? $B \setminus A$?

26) On sait que $A \subset B$ (figure). Quel est dans ce cas $A \cup B$? $A \cap B$?

27) On donne les trois ensembles $A=\{4, 5, 7, 9, 11, 15, 16, 17\}$, $B=\{1, 3, 4 , 7 ,13, 15\}$ et $C=\{2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 15, 18\}$.

a) Dessinez sur un même diagramme ces trois ensembles.

b) Ecrivez les ensembles suivants par énumération :

$A\cap C$ $\quad$ $B\setminus A$ $\quad$ $(B\cap C)\cap A$ $\quad$ $C\setminus(A\setminus B)$

$C\cup B$ $\quad$ $(A\cap B)\setminus C$ $\quad$ $(A\cup B)\cap C$

28) Sachant que : $A\cup B=\{0;1,2;3;4;5;8\}$, $B\cap C=\{3;4;5\}$, $A\cap B\cap C=\{3\}$, $A\cap B=\{3;8\}$, $A\cap C=\{2;3\}$ et $B\cup C=\{2;3;4;5;6;7;8\}$ faites un diagramme de Venn et déterminez les ensembles *A*, *B* et *C* en extension.

29) Disposez les éléments 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 dans un diagramme de Venn, sachant que :

- $A\cap C=\{1;\ 4;\ 5\}$
- $B\setminus A=\{0;\ 3;\ 6\}$
- $A\cup B\cup C=\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8\}$
- $A\cap B=\{2;\ 4;\ 5;\ 7\}$
- $C\setminus A=\{0;\ 8\}$
- $A\cap B\cap C=\{4; 5\}$

30) Soient les ensembles :

$$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$$
$$B=\{2, 3, 5, 7, 10\}\ .$$
$$C=\{1, 2, 6, 7, 8, 9\}$$

a) Diagramme de Venn.

b) Complétez par l'un des symboles $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$:

$6\ldots C$ $\quad$ $5\ldots A\setminus B$ $\quad$ $B\setminus C\ldots B$ $\quad$ $\{7\}\ldots B$

$\varnothing\ldots A$ $\quad$ $10\ldots B\cap C$ $\quad$ $3\ldots A\cup B$ $\quad$ $\{2,\ 6\}\ldots A\cap C$

c) Déterminez les ensembles :

$A\cap B$ $\quad$ $B\setminus C$ $\quad$ $C\cup A$ $\quad$ $(B\cap C)\setminus A$ $\quad$ $C\setminus(A\cup B)$

31) On donne les trois ensembles $A=\{\mathrm{a, b, d, e, f, n}\}$, $B=\{\mathrm{b, e, f, g}\}$ et $C=\{\mathrm{a, d, e, g, k}\}$.

a) Diagramme de Venn.

b) Déterminez :

$A\cap B$ $\quad$ $B\cup C$ $\quad$ $A\setminus C$ $\quad$ $B\cap(C\setminus A)$ $\quad$ $(A\cap B)\setminus C$

32) Soient les ensembles $A=\{3,4,5,6,9\}$, $B=\{0,1,5,6,7,9\}$ et $C=\{1,2,3,6,8\}$.

a) Diagramme de Venn.

b) Déterminez les ensembles suivants :

$A\cup B$ $\quad$ $B\setminus C$ $\quad$ $(C\setminus B)\setminus A$ $\quad$ $A\cap(B\cup C)$ $\quad$ $B\setminus(A\cap B\cap C)$

c) Ecrivez les ensembles suivants à l'aide des symboles $A, B, C, \setminus, \cap, \cup$ et $(\ )$:

$\{6\}$ et $\{0,1,7\}$

33) Soient $C=\{\text{carrés}\}$, $L=\{\text{losanges}\}$, $P=\{\text{parallélogrammes}\}$, $Q=\{\text{quadrilatères}\}$, $R=\{\text{rectangles}\}$ et $T=\{\text{trapèzes}\}$.

a) Ecrivez toutes les inclusions possibles (non triviales [2]) entre ces ensembles.

b) Que peut-on dire de $L\cap R$? Justifiez !

c) Représentez tous ces ensembles sur un même diagramme.

Pour les problèmes suivants :

- *Vous définissez des ensembles qui représentent la situation*
- *Vous dessinez ces ensembles sur un diagramme de Venn aussi simple que possible*
- *Vous déterminez le nombre d'éléments de chaque partie du diagramme en indiquant vos calculs !*
- *Vous répondez aux questions posées*

34) Parmi les 26 élèves d'une classe il y en a 14 qui aiment faire le français, 8 qui aiment faire les mathématiques et le français et 7 qui n'aiment faire ni le français, ni les mathématiques. Combien d'élèves aiment faire les mathématiques ?

35) Dans un groupe de 10 scouts il y en a 4 qui portent un foulard, 3 qui portent un chapeau et 4 qui portent ni foulard, ni chapeau.

a) Combien de scouts portent un foulard et un chapeau ?

b) Combien de scouts portent un foulard mais pas de chapeau ?

c) Combien de scouts portent un foulard ou un chapeau ?

36) Dans une classe de 23 élèves, 4 élèves ne pratiquent aucun sport, 3 élèves ne pratiquent que le football, 5 élèves ne pratiquent que le basket-ball, 4 élèves ne pratiquent que le tennis, 6 élèves pratiquent le football et le basket mais pas le tennis.

[2] Une inclusion triviale est une inclusion évidente de la forme $\varnothing\subset A$ ou $A\subset A$.

Le reste des élèves pratique le basket et le tennis mais pas le football. Pour chacun de ces trois sports, trouvez le nombre d'élèves qui le pratiquent.

37) Dans un groupe de 30 sportifs, 6 pratiquent la natation, 9 le tennis, 11 le football, 1 la natation et le football, 2 le tennis et le football , mais aucun qui pratique le tennis et la natation.

a) Combien ne pratiquent aucun de ces trois sports ?

b) Combien ne pratiquent qu'un seul de ces trois sports ?

38) Les 28 élèves d'une classe jouent tous au moins un des instruments suivants : violon, piano, guitare.

- 16 élèves jouent de la guitare.
- 5 élèves jouent du piano seulement.
- 6 élèves jouent du piano et du violon.
- 3 élèves jouent de la guitare et du piano seulement.
- 12 élèves jouent deux instruments.
- 2 élèves jouent les trois instruments.

a) Combien d'élèves jouent du violon et de la guitare ?

b) Combien d'élèves ne jouent pas du piano ?

39) Les élèves d'une classe ont dessiné des triangles. Christine examine ces triangles et compte 7 triangles rectangles, 12 triangles isocèles et 11 triangles obtusangles. Parmi les triangles isocèles il y en a 6 qui sont aussi obtusangles et parmi les triangles rectangles il y en a 4 qui sont en même temps isocèles. Déterminez le nombre de triangles.

40) Dans une classe de 60 étudiants, les étudiants sont inscrits en informatique, en géographie et en biologie. 19 étudient l'informatique, 23 la géographie, 31 la biologie, 8 sont inscrits en informatique et en géographie, 9 en géographie et en biologie, 11 en informatique et en biologie et enfin 5 étudiants ont opté pour les 3 matières.

a) Quel est le nombre d'étudiants de cette classe qui n'étudient aucune des 3 matières ?

b) Quel est le nombre d'étudiants de cette classe qui étudient exactement une des trois matières ?

c) Quel est le nombre d'étudiants de cette classe qui étudient la biologie **ou** la géographie, mais pas l'informatique.

41) Dans un groupe formé de 80 personnes, 32 jouent au tennis, 17 pratiquent le golf, 11 jouent au tennis et au golf, 1 personne joue au golf et au football, 1 personne pratique les 3 sports, 20 pratiquent exactement deux sports et chacun pratique au moins l'un des trois sports.

a) Faites un diagramme de Venn.

b) Combien de personnes jouent au football ?

c) Combien de personnes pratiquent un seul sport ?

d) Combien de personnes ne jouent qu'au tennis ?

42) Les 124 élèves d'un lycée inscrits en classe de 3^e peuvent choisir d'étudier l'anglais, le français ou l'espagnol . On sait que :

- 25 n'étudient que le français ;
- 65 étudient l'anglais ;
- 33 étudient l'espagnol ;
- 15 n'étudient aucune langue ;
- 9 étudient les trois langues ;
- 22 étudient au moins deux langues ;
- 7 n'étudient que le français et l'espagnol.

A l'aide d'un diagramme de Venn déterminez :

a) le nombre d'élèves qui étudient l'anglais ***ou*** l'espagnol

b) le nombre d'élèves qui étudient l'anglais ***et*** l'espagnol

c) le nombre d'élèves qui n'étudient que l'espagnol

d) le nombre d'élèves qui étudient le français et l'anglais, mais pas l'espagnol

e) le nombre d'élèves qui n'étudient que l'anglais

43) Dans une classe de 28 élèves, 15 ont un frère, 14 ont une soeur et 9 sont des enfants uniques. Combien d'élèves de cette classe ont un frère *et* une soeur ?

44) Dans un groupe de musiciens il y en a 15 qui aiment jouer la musique de Bach, 10 celle de Chopin, 14 celle de Mozart, 7 celle de Bach et de Mozart, 20 celle de Bach ou de Chopin et 7 qui n'aiment jouer que celle de Mozart. Enfin 10 n'aiment jouer aucun de ces trois compositeurs alors que 3 aiment les jouer tous les trois.

a) Combien de ces musiciens aiment jouer du Bach et du Chopin ?

b) Combien de ces musiciens n'aiment jouer que du Bach ?

c) Combien de ces musiciens n'aiment jouer que du Chopin et du Mozart ?

d) Combien de ces musiciens n'aiment jouer que du Chopin ?

e) Combien de musiciens y a-t-il dans ce groupe ?

45) Dans un groupe de 40 touristes, 16 parlent l'allemand, 19 le français, 17 l'italien, 5 parlent l'allemand et le français, 6 l'allemand et l'italien, 7 le français et l'italien et 2 parlent ces trois langues. Combien de personnes y a-t-il dans ce groupe qui ni parlent aucune de ces trois langues ?