Chapitre 5 : Proportionnalité

1. Exemples de grandeurs proportionnelles

a) Soit C le côté d'un carré et P son périmètre, exprimés tous les deux en cm. Compléter le tableau suivant :

C (cm)	2	4	3	9		
P (cm)					64	72

On remarque que :

(1) $P = \ldots\ldots \cdot C$ et $\dfrac{P}{C} = \ldots\ldots$

(2) $C = \ldots\ldots \cdot P$ et $\dfrac{C}{P} = \ldots\ldots$

On dit que les grandeurs C et P sont ***proportionnelles*** et :

- 4 est le ***coefficient de proportionnalité*** de C vers P.
- $\frac{1}{4}$ est le ***coefficient de proportionnalité*** de P vers C.

b) Une voiture roule avec une ***vitesse constante*** de 60 km/h. On note T le temps en h et D la distance parcourue en km. Compléter le tableau suivant :

T (h)	0,5	1	1,5	4,5		
D (km)					150	1200

On remarque à nouveau que :

(1) $D = \ldots\ldots \cdot T$ et $\dfrac{D}{T} = \ldots\ldots$

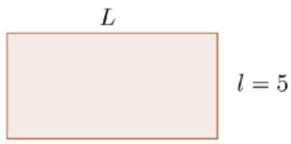
(2) $T = \ldots\ldots \cdot D$ et $\dfrac{T}{D} = \ldots\ldots$

Les grandeurs T et D sont ***proportionnelles*** et :

- 60 est le coefficient de proportionnalité de T vers D (c'est la ***vitesse*** !)
- $\frac{1}{60}$ est le coefficient de proportionnalité de D vers T.

c) Un rectangle a comme dimensions L et $l = 5$ (en cm). On note Q son périmètre. Complétez le tableau suivant, puis répondez aux questions :

L (cm)	1	2	3	4		
Q (cm)					22	30



- Est-ce que le rapport $\dfrac{Q}{L}$ est ***constant*** ?

  ....

  ....

  ....

- Quelle ***formule*** permet de calculer Q ***en fonction de*** (= à l'aide de) L ?

  ....

Conclusion : Les grandeurs L et Q ***ne sont pas proportionnelles*** !

> ***Définition***. Deux grandeurs (mesures, quantités) X et Y, l'une dépendant de l'autre, sont (***directement***) ***proportionnelles*** et on note $X \sim Y$ s'il existe une constante ***non nulle*** k telle que $Y = k \cdot X$. La constante k est appelée le ***coefficient de proportionnalité*** de X vers Y.

Remarques.

a) $Y = kX \Leftrightarrow \dfrac{Y}{X} = k$, donc :

Deux grandeurs X et Y sont proportionnelles $\Leftrightarrow$ le ***rapport*** $\dfrac{Y}{X}$ ***est constant***.

b) $Y = kX \Leftrightarrow X = \dfrac{1}{k}Y \Leftrightarrow \dfrac{X}{Y} = \dfrac{1}{k}$, donc :

Deux grandeurs X et Y sont proportionnelles $\Leftrightarrow$ le ***rapport*** $\dfrac{X}{Y}$ ***est constant***.

c) $\dfrac{Y}{X} = k \Leftrightarrow \dfrac{X}{Y} = \dfrac{1}{k}$, donc :

Si le coefficient de proportionnalité de X vers Y est k, alors celui de Y vers X est $\dfrac{1}{k}$.

d) Les tableaux complétés dans les exemples a) et b) sont appelés des ***tableaux de proportionnalité***. Le tableau de l'exemple c) n'est pas un tableau de proportionnalité.

2. Propriétés des tableaux de proportionnalité

On suppose que les grandeurs X et Y dans tous les tableaux suivants sont proportionnelles.

a) ***Propriété 1 (des lignes)*** : Tous les nombres d'une ligne d'un tableau de proportionnalité s'obtiennent en multipliant ceux de l'autre ligne par le ***coefficient de proportionnalité***. (C'est la définition de grandeurs proportionnelles !)

X	4	9	12	16	
Y	6	13,5	18		48

Calculs :

$\frac{6}{4} =$

$\frac{18}{12} =$

$\frac{13,5}{9} =$

b) ***Propriété 2 (des colonnes)*** : Si l'une des grandeurs proportionnelles est multipliée (ou divisée) par 2, 3, 4, 5 etc. alors l'autre grandeur est également multipliée (ou divisée) par 2, 3, 4, 5 etc.

X	30	60	20	100
Y	21			

Calculs et vérifications :

$\frac{21}{30} =$

b) ***Propriété 3 (additivité des colonnes)*** : On peut additionner deux colonnes d'un tableau de proportionnalité pour en trouver une nouvelle.

X	18	60	78
Y	21		

Calculs et vérifications :

$\frac{21}{18} =$

3. Calcul de la quatrième proportionnelle. Règle de trois

Voici un tableau de proportionnalité :

X	30	40
Y	24	z

La valeur manquante à déterminer s'appelle parfois la quatrième proportionnelle. On peut la déterminer de plusieurs façons, en utilisant les propriétés précédentes :

a) En utilisant la ***propriété 1*** des lignes (***coefficient de proportionnalité***) :

X	30	40
Y	24	z

b) En utilisant la ***propriété 2 des colonnes*** :

X	30	40
Y	24	z

c) En utilisant la ***propriété 3 des colonnes*** :

X	30		40
Y	24		z

d) En utilisant une ***équation*** :

e) En utilisant la ***règle de trois*** :

4. Reconnaître la proportionnalité sur un graphique

a) Reprenons l'exemple a) du §1, où C est le côté d'un carré et P son périmètre :

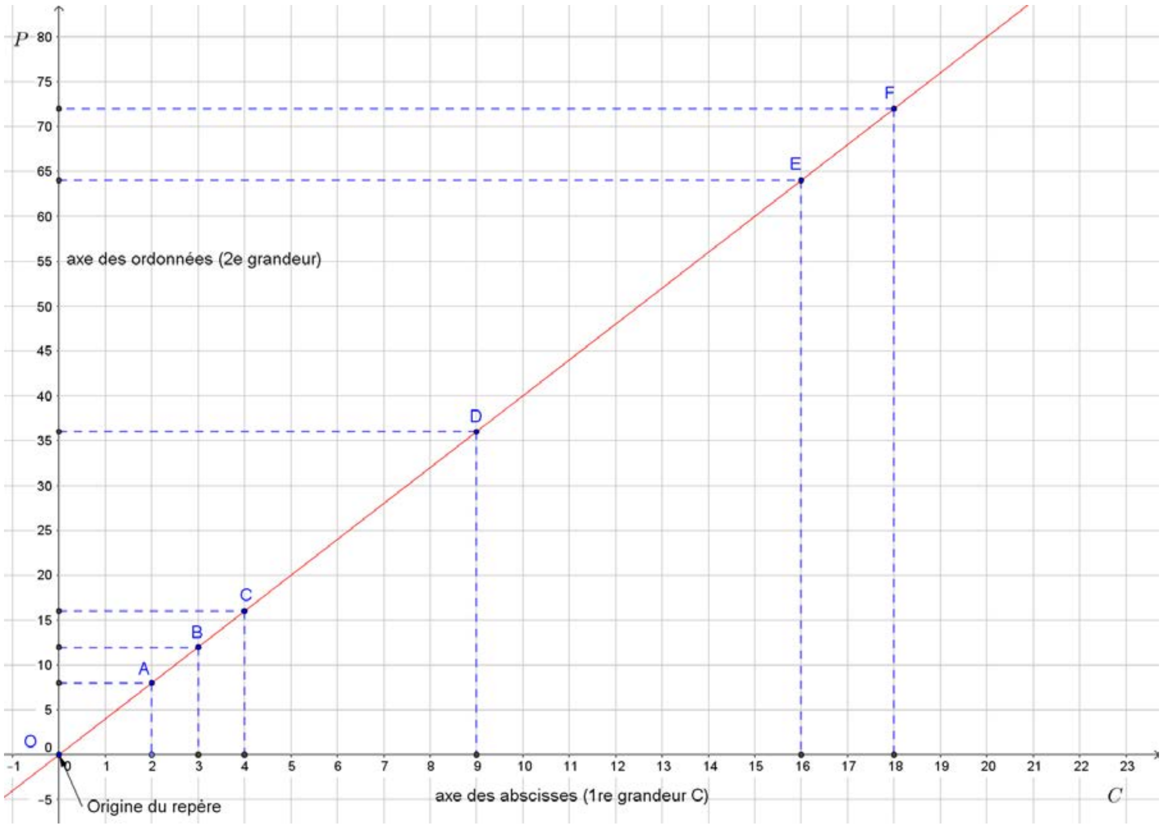
C (cm)	2	3	4	9		
P (cm)	8	12	16		64	72

Pour représenter graphiquement les données du tableau, on trace d'abord un ***repère*** : il est formé par deux droites graduées perpendiculaires (les ***axes***) et par leur point d'intersection O (l'***origine*** du repère). Chaque donnée du tableau (colonne) a deux « dimensions », le côté C et le périmètre P. Elle peut donc être représentée sur le graphique par un point, qui a aussi deux ***coordonnées*** :

- la 1re est l'***abscisse*** : c'est la longueur d'un côté C et
- la 2e est l'***ordonnée***, c'est le périmètre P

Les points à représenter sont donc :

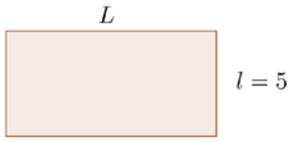
$$A(2,8)\ ,\ B(3,12)\ ,\ C(4,16)\ ,\ D(9,....)\ \ ,\ E(.....,64)\ \ \text{et}\ \ F(......,72)$$



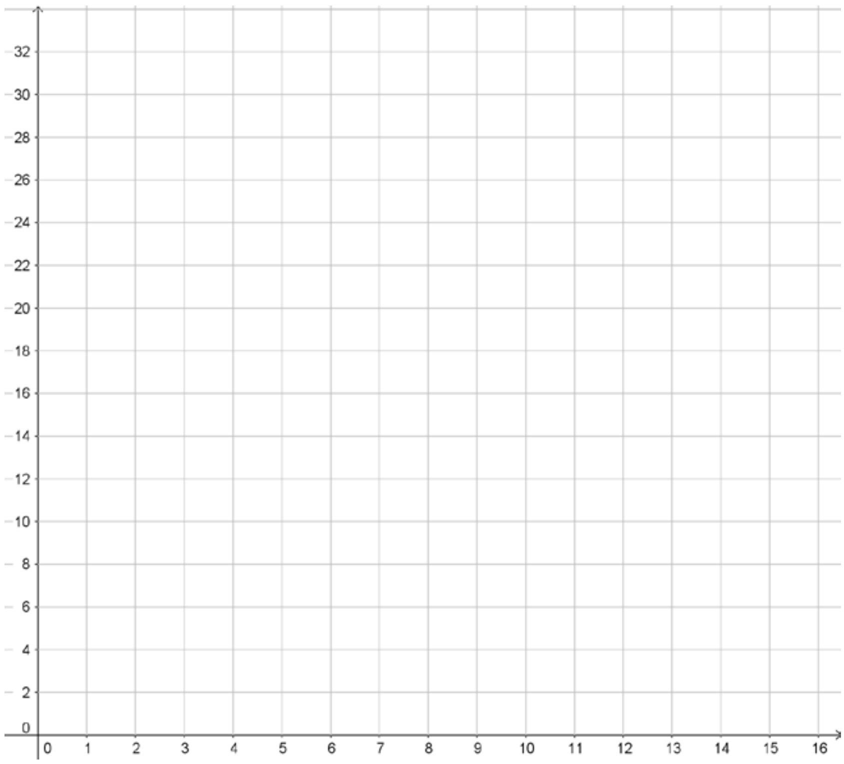
Propriété 4. Lorsqu'on représente les données d'un tableau de proportionnalité (ou provenant de grandeurs proportionnelles) sur un graphique, alors tous les points sont situés sur une ***droite passant par l'origine*** du repère.

b) Reprenons maintenant l'exemple c) du §1. Rappelons que Q est le périmètre d'un rectangle dont la largeur est 5 cm et la longueur (variable) est L (en cm):

L (cm)	1	2	3	4		
Q (cm)					22	30



Représenter graphiquement ces données dans le repère ci-dessous :



Que constatez-vous ? Expliquez le résultat !

5. Grandeurs inversement proportionnelles

Exemple : Un ouvrier met 4 h pour réaliser un certain travail. Combien de temps mettront 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 ou 12 ouvriers ?

N (nombre d'ouvriers)	1	2	3	4	5	6	8	10	12
D (durée en minutes)									

Est-ce que le rapport D/N est constant ? Est-ce que les grandeurs N et D sont proportionnelles ?

Calculer le produit $N \cdot D$ pour toutes les données du tableau ! Que constatez-vous ?

Complétez la phrase suivante :

Si le nombre N d'ouvriers devient 2, 3, 4 etc. fois plus grand, alors la durée de travail D ....

Retenons : Les grandeurs N et D sont ***inversement proportionnelles***.

Définition.

Deux grandeurs X et Y, l'une dépendant de l'autre, sont ***inversement proportionnelles*** s'il existe une constante ***non nulle*** k telle que $X \cdot Y = k$.

Propriété.

Si X devient ***2, 3, 4 etc. fois plus grand***, alors Y devient ***2, 3, 4 etc. fois plus petit*** !