Eléments d'arithmétique

1. Multiples d'un entier naturel

a) L'***ensemble*** (die ***Menge***) des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,...\}.$$

b) Les ***multiples*** de 2 (die Vielfachen von 2) ou ***entiers pairs*** sont : 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, … L'ensemble des ***multiples*** de 2 est noté $2\mathbb{N}$.

$$2\mathbb{N} = \{0,2,4,6,8,10,12,14,...\}.$$

Tout entier pair est de la forme $2n$, où n est un entier. Par exemple : $26 = 2 \cdot 13$ et $86 = 2 \cdot 43$.

Remarque : Tout entier ***impair*** est de la forme $2n+1$ ou $2n-1$, où n est un entier. Par exemple : $27 = 2 \cdot 13 + 1$ ou $27 = 2 \cdot 14 - 1$.

b) Les ***multiples*** de 3 sont : 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, …

L'ensemble des ***multiples*** de 3 est noté $3\mathbb{N}$.

$$3\mathbb{N} = \{0,3,6,9,12,15,...\}.$$

Tout multiple de 3 est de la forme $3n$, où n est un entier. Par exemple : $42 = 3 \cdot 14$ et $81 = 3 \cdot 27$.

c) Les ***multiples*** de 4 sont : 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, …

L'ensemble des ***multiples*** de 3 est noté $4\mathbb{N}$.

$$4\mathbb{N} = \{0,4,8,12,16,20,24,...\}.$$

Tout multiple de 4 est de la forme $4n$, où n est un entier. Par exemple : $48 = 4 \cdot 12$ et $80 = 4 \cdot 20$.

Définition. Soit a un entier naturel. Un ***multiple*** de a est un entier naturel de la forme an, où n est un entier. L'ensemble des multiples de a est noté $a\mathbb{N}$.

2. Diviseurs d'un entier naturel

Définition. Soit a et b deux entiers naturels. On dit que b est un ***diviseur*** de a ou encore que b ***divise*** a (on écrit $b \mid a$) ssi a est un multiple de b.

Exemples :

- $3 \mid 12$ car $12 = 3 \cdot 4$
- $9 \mid 45$ car $45 = 9 \cdot 5$
- $100 \mid 1300$ car $1300 = 100 \cdot 13$
- $48 \mid 96$ car $96 = 48 \cdot 2$

Remarques :

a) Quel que soit l'entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} &1 \mid n \quad \text{car } n = 1 \cdot n \\ &n \mid n \quad \text{car } n = n \cdot 1 \\ &n \mid 0 \quad \text{car } 0 = n \cdot 0 \end{aligned}$$

b) En particulier : $0 \mid 0$ mais ***attention*** :

$0 \nmid n$ si n est différent de 0.

Définition. L'ensemble des diviseurs d'un entier naturel a est noté Div a.

Exemples :

- $\operatorname{Div} 12 = \{1,2,3,4,6,12\}$;
- $\operatorname{Div} 25 = \{1,5,25\}$;
- $\operatorname{Div} 45 = \{1,3,5,9,15,45\}$
- $\operatorname{Div} 56 = \{1,2,4,7,8,14,28,56\}$
- $\operatorname{Div} 1 = \{1\}$;
- $\operatorname{Div} 0 = \{0,1,2,3,4,...\} = \mathbb{N}$.

Pour chercher les diviseurs d'un entier naturel ***pas trop grand***, on utilise le schéma pratique ci-dessous :

Div 100	
1	100
2	50
4	25
5	20
10	10

$\Rightarrow \quad \operatorname{Div} 100 = \{1,2,4,5,10,20,25,50,100\}$

3. Caractères de divisibilité

a) Un entier naturel est divisible par ***2*** ssi ***il se termine par 0,2,4,6 ou 8***.

b) Un entier naturel est divisible par ***3*** ssi la ***somme de ses chiffres*** (Quersumme) est divisible par ***3***.

c) Un entier naturel est divisible par ***4*** ssi le ***nombre formé par ses deux derniers chiffres*** est divisible par ***4***.

d) Un entier naturel est divisible par ***5*** ssi ***il se termine par 0 ou par 5***.

e) Un entier naturel est divisible par ***6*** ssi ***il est divisible par 2 et par 3***.

Exemples : $6 \mid 8910$ car $2 \mid 8910$ et $3 \mid 8910$;

$6 \nmid 1293$ car $2 \nmid 1293$.

f) Soit N un entier naturel, u son dernier chiffre et n l'entier obtenu en biffant u dans N. (Par exemple, si $N = 364$, alors $u = 4$ et $n = 36$.) Alors N est divisible par 7 si et seulement si $n - 2u$ est divisible par 7.

Exemples : $7 \mid 364$ car $36 - 2 \cdot 4 = 28$ et $7 \mid 28$;

$7 \nmid 589$ car $58 - 2 \cdot 9 = 40$ et $7 \nmid 40$;

Remarque : Pour les nombres assez grands, on répète ce test sur le résultat du test, éventuellement plusieurs fois. Par exemple : est-ce que 7 est un diviseur de 11'114 ?

$1111 - 2 \cdot 4 = 1103$

$110 - 2 \cdot 3 = 104$ $\qquad$ $7 \nmid 2$, donc $7 \nmid 11'114$

$10 - 2 \cdot 4 = 2$

Notons qu'il est souvent plus facile de faire la division par 7 elle-même …

g) Un entier naturel est divisible par ***8*** ssi ***le nombre formé par les 3 derniers chiffres*** est divisible par ***8***.

h) Un entier naturel est divisible par ***9*** ssi ***la somme de ses chiffres*** est divisible par 9.

i) Un entier naturel est divisible par ***10*** ssi ***il se termine par 0***.

j) Un entier naturel est divisible par ***11*** ssi la ***somme alternée*** de ses chiffres est divisible par 11.

Exemples : $11 \mid 345895$ car $3 - 4 + 5 - 8 + 9 - 5 = 0$ et $11 \mid 0$;

$11 \nmid 1002$ car $1 - 0 + 0 - 2 = -1$ et $11 \nmid -1$.

k) Un entier naturel est divisible par ***25*** ssi ***il se termine par 00***, ***par 25***, ***par 50 ou par 75***.

l) Un entier naturel est divisible par ***100*** ssi ***il se termine par 00***.

4. Nombres premiers. Factorisation première

Définition. Un ***nombre premier*** est un entier naturel qui a ***exactement 2 diviseurs*** : 1 et lui-même.

La liste des nombres premiers commence par :

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots$$

Remarques.

a) 1 n'est pas un nombre premier car $\operatorname{Div} 1 = \{1\}$. (1 a un seul diviseur.)

b) 0 n'est pas un nombre premier car $\operatorname{Div} 0 = \mathbb{N}$. (0 a une infinité de diviseurs.)

c) 2 est le seul nombre premier pair.

d) Il y a une infinité de nombres premiers.

Définition. Les entiers > 2 qui ne sont pas premiers sont dits ***composés***.

Exemples. $12 = 4 \cdot 3$ et $1001 = 11 \cdot 91$ sont des nombres composés.

<u>Crible d'Eratosthène</u>. C'est une méthode pratique permettant de trouver assez vite tous les nombres premiers jusqu'à un entier naturel N donné. En voici le ***principe*** :

On écrit la liste de tous les entiers de 2 jusqu'à N.

(1) On garde $p_1 = 2$ et on élimine tous les autres multiples de 2.

(2) On garde $p_2 = 3$ qui est le premier élément non éliminé après 2 et on élimine tous les autre multiples de 3.

(3) On garde $p_3 = 5$ qui est le premier élément non éliminé après 3 et on élimine tous les autre multiples de 5.

(4) On répète le procédé aussi longtemps que $p_k \leq \sqrt{N}$ [1].

Les nombres non éliminés sont les nombres premiers $\leq N$.

Dressons par exemple la liste des nombres premiers ≤ 100 :

[1] La ***racine carrée*** d'un nombre a, notée $\sqrt{a}$, est le nombre positif x tel que $x^2 = a$. Par exemple $\sqrt{36} = 6$, car $6^2 = 36$ et $\sqrt{100} = 10$, car $10^2 = 100$.

	2	3	~~4~~	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Voici donc la liste des nombres premiers ≤ 100 :

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Factorisation première. Si l'on décompose un entier naturel $n \geq 2$ en ***autant de facteurs entiers*** $(\neq 1)$ ***que possible***, alors tous ces facteurs seront des nombres premiers. On obtient ainsi la ***factorisation première (f.p.)*** ou ***décomposition en facteurs premiers*** de n.

Exemples.

- $$\begin{aligned} 100 &= 2 \cdot 50 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 25 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \\ &= 2^2 \cdot 5^2 \end{aligned}$$

  On utilise les ***puissances*** pour obtenir une expression plus condensée !

  C'est la factorisation première de 100.

- $$\begin{aligned} 630 &= 10 \cdot 63 \\ &= 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \\ &= 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \\ &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \end{aligned}$$

  On range les facteurs premiers ***par ordre croissant*** !

  C'est la factorisation première de 630.

- 59 est un nombre premier, donc c'est aussi la factorisation première de 59.

> ***Théorème fondamental de l'arithmétique***. Tout entier naturel ≥ 2 admet une factorisation première ***unique*** !

Disposition pratique pour la factorisation première :

91'476	2
45'738	2
22'869	3
7'623	3
2'541	3
847	7
121	11
11	11
1	

$\Rightarrow\ 91'476 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11^2$

10'125	5
2'025	5
405	5
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$\Rightarrow 10'125 = 3^4 \cdot 5^3$

Remarque : On n'a pas besoin diviser par les facteurs premiers dans l'ordre, mais dans la factorisation première on les range toujours par ordre croissant !

La factorisation première d'un entier est ***utile pour déterminer ses diviseurs***. Reprenons par exemple le nombre $91'476 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11^2$.

- Ce nombre est divisible par les nombres premiers 2, 3, 7 et 11. Il n'est pas divisible par 5, par 13 ou par 23, puisque 5, 13 et 23 sont des nombres premiers qui n'apparaissent pas dans la factorisation première de $91'476$.
- $91'476$ est divisible par 4, car $4 = 2^2$ et dans la f.p. de $91'476$ on trouve 2^2. $91'476$ n'est pas divisible par 8, car $8 = 2^3$ et dans la f.p. de $91'476$ on a seulement 2 facteurs 2.
- De même $91'476$ est divisible par 3, par $9 = 3^2$ et par $27 = 3^3$, car dans la f.p. de $91'476$ on trouve 3 facteurs 3. Mais $91'476$ n'est pas divisible par 3^4.
- $91'476$ est aussi divisible par 6 car $6 = 2 \cdot 3$, par $77 = 7 \cdot 11$, par $28 = 2^2 \cdot 7$, par $99 = 3^2 \cdot 11$, mais pas par $15 = 3 \cdot 5$, ni par $56 = 2^3 \cdot 7$, etc

Règle : Si $n = 2^p \cdot 3^q \cdot 5^r \cdot ...$ et $n' = 2^{p'} \cdot 3^{q'} \cdot 5^{r'} \cdot ...$, alors :

$$n \mid n' \Leftrightarrow \begin{cases} p \leq p' \\ q \leq q' \\ r \leq r' \\ ... \end{cases}$$

En d'autres termes : n ***est un diviseur de*** n' ssi les ***exposants*** des nombres premiers dans la factorisation première de n ***sont tous inférieurs ou égaux*** aux ***exposants*** des mêmes nombres premiers dans la factorisation première de n'.

5. Diviseurs communs. Pgcd

Définition. Le ***plus grand commun diviseur*** (***pgcd***) de plusieurs naturels est leur diviseur commun le plus grand.

Exemple. $\text{pgcd}(42,36) = ?$

$\text{Div}42 = \{\underline{1},\underline{2},\underline{3},\underline{6},7,14,21,42\}$ et $\text{Div}\,36 = \{\underline{1},\underline{2},\underline{3},4,\underline{6},9,12,18,36\}$

On a souligné dans les deux ensembles les ***diviseurs communs*** (gemeinsame Teiler). Donc : $\text{pgcd}(42,36) = 6$.

Propriétés du pgcd

a) $\boxed{\text{Si } a \mid b \text{ alors } \text{pgcd}(a,b) = a}$

Exemple : $\text{pgcd}(17,34) = 17$.

b) ***Commutativité*** : $\boxed{\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(b,a)}$

Exemple : $\text{pgcd}(12,15) = \text{pgcd}(15,12) = 3$.

c) ***Associativité*** :

$$\boxed{\text{pgcd}(a,b,c) = \text{pgcd}(\text{pgcd}(a,b),c) = \text{pgcd}(a,\text{pgcd}(b,c))}$$

Exemples :

(1) $\text{pgcd}(24,40,60) = \text{pgcd}(\text{pgcd}(24,40),60) = \text{pgcd}(8,60) = 4$,

ou bien :

$\text{pgcd}(24,40,60) = \text{pgcd}(24,\text{pgcd}(40,60)) = \text{pgcd}(24,20) = 4$.

(2) L'associativité peut être généralisé au calcul du pgcd de plusieurs entiers naturels :

$$\begin{aligned}&\text{pgcd}(98,42,84,63)\\ &= \text{pgcd}(98,\text{pgcd}(42,84),63)\\ &= \text{pgcd}(98,42,63)\\ &= \text{pgcd}(98,\text{pgcd}(42,63))\\ &= \text{pgcd}(98,7)\\ &= 7\end{aligned}$$

d) ***Distributivité de la multiplication par rapport au pgcd*** :

$$\boxed{\text{pgcd}(a \cdot b, a \cdot c) = a \cdot \text{pgcd}(b, c)}$$

Exemples :

(1) $\text{pgcd}(270,300) = 10 \cdot \text{pgcd}(27,30) = 10 \cdot 3 = 30$;

(2) $\text{pgcd}(112,128) = 4 \cdot \text{pgcd}(28,32) = 4 \cdot 4 = 16$

Calcul du pgcd à l'aide de la factorisation première

Exemple : $\text{pgcd}(17640, 30800) = ?$

17'640	2	30'800	2
8'820	2	15'400	2
4'410	2	7'700	2
2'205	3	3'850	2
735	3	1'925	5
245	5	385	5
49	7	77	7
7	7	11	11
1		1	

$\Rightarrow 17'640 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$ $\qquad\Rightarrow 30'800 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$

Donc :

$$\text{pgcd}(17'640, 30'800) = 2^3 \cdot 5 \cdot 7 = 280$$

Règle : Le pgcd de plusieurs entiers naturels est le produit de leurs ***diviseurs premiers communs***, affectés chacun du ***plus petit des exposants*** apparaissant dans les factorisations premières respectives.

Définition. Deux entiers naturels a et b sont dits ***premiers entre eux*** si leur seul diviseur commun est 1, c.-à-d. si $\text{pgcd}(a,b) = 1$.

Exemples :

(1) $16 = 2^4$ et $25 = 5^2$ sont premiers entre eux car $\text{pgcd}(16,25) = 1$.

(2) $35 = 5 \cdot 7$ et $12 = 2^2 \cdot 3$ sont premiers entre eux car $\text{pgcd}(35,12) = 1$.

Observons que :

Deux entiers naturels sont premiers entre eux ssi ils n'ont ***pas de diviseur premier commun***.

Exemple. $a = 2^5 \cdot 11 \cdot 13^7 \cdot 19$ et $b = 3^8 \cdot 5^2 \cdot 23$ sont premiers entre eux, car a admet comme diviseurs premiers 2, 11, 13 et 19 alors que b admet comme diviseurs premiers 3, 5 et 23.

5. Multiples communs. Ppcm

Définition. Le ***<u>p</u>lus <u>p</u>etit <u>c</u>ommun <u>m</u>ultiple*** (***ppcm***) de plusieurs naturels est leur multiple commun ***le plus petit*** et ***non nul.***

Exemple. $\text{ppcm}(12,15) = ?$

$12\mathbb{N} = \{\underline{0},12,24,36,48,\underline{60},72,84,96,108,\underline{120},\ldots\}$ et

$15\mathbb{N} = \{\underline{0},15,30,45,\underline{60},75,90,105,\underline{120},\ldots\}$

On a souligné dans les deux ensembles les multiples communs. Le plus petit multiple commun non nul est 60. Donc : $\text{ppcm}(12,15) = 60$.

<u>Propriétés du ppcm</u>

a) $\boxed{\text{Si } a \mid b \text{ alors } \text{ppcm}(a,b) = b}$

Exemple : $\text{ppcm}(15,90) = 90$.

b) $\boxed{\text{Si } a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux alors } \text{ppcm}(a,b) = a \cdot b}$

Exemple : $\text{ppcm}(6,35) = 6 \cdot 35 = 210$.

c) ***<u>Commutativité</u>*** :

$$\boxed{\text{ppcm}(a,b) = \text{ppcm}(b,a)}$$

Exemple : $\text{ppcm}(12,15) = \text{ppcm}(15,12) = 60$.

d) ***<u>Associativité</u>*** :

$$\boxed{\text{ppcm}(a,b,c) = \text{ppcm}(\text{ppcm}(a,b),c) = \text{ppcm}(a,\text{ppcm}(b,c))}$$

Exemples :

(1) $\text{ppcm}(2,6,15) = \text{ppcm}(\text{ppcm}(2,6),15) = \text{ppcm}(6,15) = 30$,

ou bien :

$\text{ppcm}(2,6,15) = \text{ppcm}(2,\text{ppcm}(6,15)) = \text{ppcm}(2,30) = 30$.

(2) L'associativité peut être généralisé au calcul du ppcm de plusieurs entiers naturels :

$\text{ppcm}(5,6,7,8,9)$

$= \text{ppcm}(\text{ppcm}(5,7,8),\text{ppcm}(6,9))$

$= \text{ppcm}(280,18) = 2 \cdot \text{ppcm}(140,9) = 2 \cdot 140 \cdot 9 = 2'520$

Dans la dernière ligne on a utilisé la :

e) ***Distributivité de la multiplication par rapport au ppcm*** :

$$\boxed{\text{ppcm}(a \cdot b, a \cdot c) = a \cdot \text{ppcm}(b, c)}$$

Exemple :

$\text{ppcm}(350, 450)$

$= 50 \cdot \text{ppcm}(7, 9)$

$= 50 \cdot 63$

$= 3'150$

Calcul du ppcm à l'aide de la factorisation première

Exemple : $\text{ppcm}(1960, 1232) = ?$

1960	2	1232	2
980	2	616	2
490	2	308	2
245	5	154	2
49	7	77	7
7	7	11	11
1		1	

$\Rightarrow 1960 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$ $\quad\quad$ $\Rightarrow 1232 = 2^4 \cdot 7 \cdot 11$

Donc :

$$\text{ppcm}(1960, 1232) = 2^4 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 = 43'120$$

Règle : Le ppcm de plusieurs entiers naturels est le produit de tous les ***diviseurs premiers*** apparaissant dans les factorisations premières respectives, chacun étant affecté du ***plus grand des exposants***.