Question 2

(1) C.E. : $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ ou $x < -1$:

$\log_4\left(x^2-1\right) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 1 = 4^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

$$S = \{\pm 3\}.$$

(2) Posant $y = e^x$, l'équation devient :

$3y^2 - y - 2 = 0$, dont les racines sont $y_1 = 1$ et $y_2 = -\frac{2}{3}$.

Donc :

$$\begin{cases} e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \\ e^x = -\frac{2}{3} \text{ impossible} \end{cases}$$

$$S = \{0\}.$$

(3) On a :

$$\begin{aligned}
&0,4^{x^2+7x} > 6,25^{3-x} \\
&\Leftrightarrow \left(\tfrac{2}{5}\right)^{x^2+7x} > \left(\tfrac{25}{4}\right)^{3-x} \\
&\Leftrightarrow \left(\tfrac{2}{5}\right)^{x^2+7x} > \left(\left(\tfrac{2}{5}\right)^{-2}\right)^{3-x} \\
&\Leftrightarrow \left(\tfrac{2}{5}\right)^{x^2+7x} > \left(\tfrac{2}{5}\right)^{-6+2x} \\
&\Leftrightarrow x^2 + 7x < -6 + 2x \quad (\text{base} = \tfrac{2}{5} < 1) \\
&\Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 < 0
\end{aligned}$$

Les racines du trinôme sont –2 et –3. Le trinôme est < 0 entre les racines. Donc : $S =]-3, -2[$.

Question 3

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\ln x}{x^{-2}} \underset{H}{\overset{\text{"f.i.}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x^{-1}}{-2x^{-3}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{2}x^2 = 0 = f(0)$.

Donc f est continue (à droite) en 0.

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^2(1-\ln x) = -\infty \Rightarrow$ pas d'A.H.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} x(1-\ln x) = -\infty \Rightarrow$ pas d'A.O.

($\mathcal{G}_f$ admet en $+\infty$ une B.P. de direction Oy.)

(3) a) $(\forall x > 0)$ $f'(x) = 2x(1-\ln x) - x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 - 2\ln x - 1) = x(1 - 2\ln x)$.

b) Dérivabilité en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\ln x)}{x^{-1}} \underset{H}{\overset{\text{"f.i.}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

Donc $f'(0) = 0$. $\mathcal{G}_f$ admet en (0,0) une demi-tangente horizontale.

c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0$ ou $\ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \sqrt{e}$.

(4) a) $(\forall x > 0)\ \ f''(x) = 1 - 2\ln x + x \cdot \left(-\frac{2}{x}\right) = -1 - 2\ln x$.

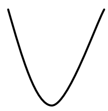
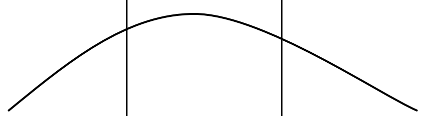
b) Dérivabilité seconde en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(1 - 2\ln x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 - 2\ln x = +\infty .$$

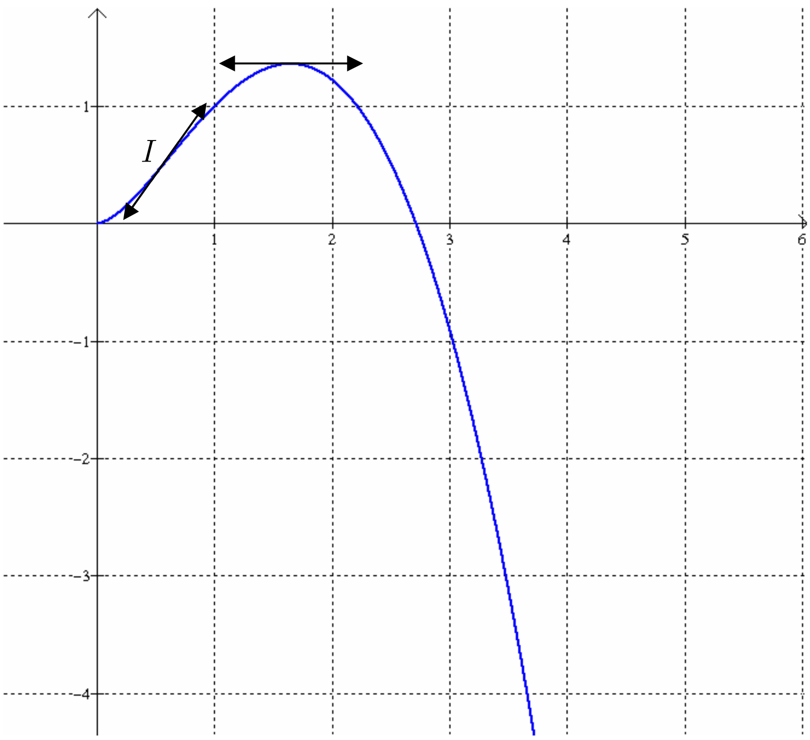
Donc $f''(0)$ n'existe pas.

c) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Il est clair que f'' change de signe en ce point puisque la fonction ln (et donc aussi f'') est strictement monotone. Donc $I\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{3}{2e}\right) \approx I(0{,}61; 0{,}55)$.

(5) Tableau de variations :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	$0 \quad +$		$+$	0	$-$
$f''(x)$	$\Vert \quad +$	0	$-$		$+$
$f(x)$	0 (m) $\nearrow$			$\frac{e}{2} \simeq 1{,}36$ (M)	$\searrow$ $-\infty$
$\mathcal{G}_f$		(I)			

(6)



Question 4

(1) $g_1 : x \mapsto 4^x$

$\downarrow$ multiplier les abscisses par 3, car $g_2(x) = g_1\left(\frac{x}{3}\right)$

$g_2 : x \mapsto 4^{\frac{x}{3}}$

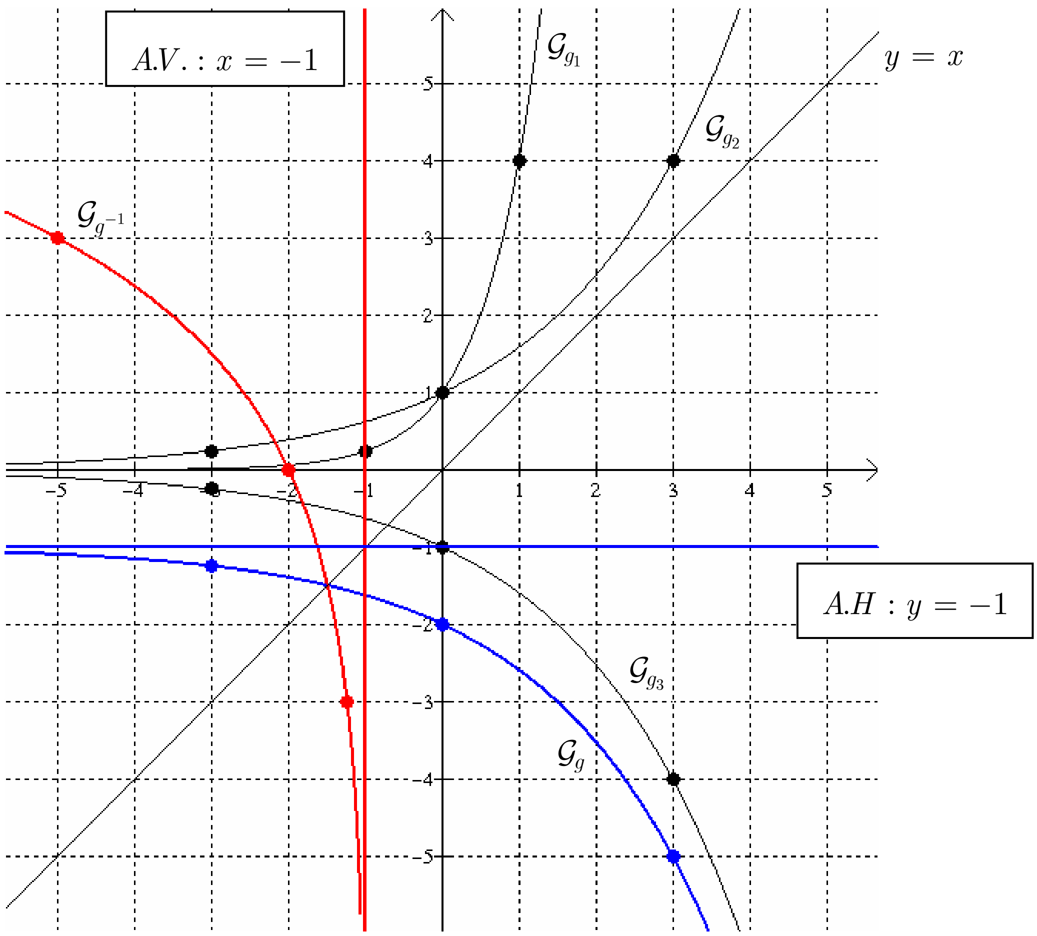
$\downarrow$ multiplier les ordonnées par -1, car $g_3(x) = -g_2(x)$

$g_3 : x \mapsto -4^{\frac{x}{3}}$

$\downarrow$ soustraire 1 aux ordonnées, car $g(x) = g_3(x) - 1$

$g : x \mapsto -1 - 4^{\frac{x}{3}}$

Le graphe de la fonction de référence g_1 a une A.H. à gauche d'équation : $y = 0$.
Le graphe de la fonction g a donc une A.H. à gauche d'équation : $y = -1$.



(2) g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. (Cela résulte du fait que la fonction de départ g_1 est strictement croissante et que les transformations géométriques utilisées conservent la stricte monontonie.) g définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $B = \operatorname{im} g =]-\infty, -1[$. Pour $y < -1$, on a :

$$\begin{aligned} y = -1 - 4^{\frac{x}{3}} &\Leftrightarrow 4^{\frac{x}{3}} = -1 - y \\ &\Leftrightarrow \tfrac{x}{3} = \log_4(-1-y) \\ &\Leftrightarrow x = 3 \cdot \log_4(-1-y) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} g^{-1} :] - \infty, -1[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3\log_4(-1-x) \end{aligned}$$

Les graphes de g et de g^{-1} sont symétriques par rapport à $\Delta : y = x$. L'A.H. de $\mathcal{G}_g$ est donc transformée en l'A.V. de $\mathcal{G}_{g^{-1}}$ d'équation $x = -1$.