1B	Devoir de mathématiques I,1	21.10.05

Durée : 2h.

Remarque : La TI Voyage 200 n'est pas permise.

Question 1 — 12 (=6+6) points

(1) Compléter et démontrer : $(\forall a \in ...)\ (\forall x \in ...)\ (\forall r \in ...)\ \log_a(x^r) = ...$

(2) Etablir le lien entre deux fonctions logarithmes de bases différentes.

Question 2 — 12 (=3+3+6) points

Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(1) $\log_4\left(x^2-1\right) = \frac{3}{2}$

(2) $3e^{2x} - e^x = 2$

(3) $0{,}4^{x^2+7x} > 6{,}25^{3-x}$

Question 3 — 25 (=2+2+8+8+3+2) points

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2(1-\ln x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(1) Etudier la continuité de f en 0.

(2) Etudier le comportement asymptotique de f en $+\infty$.

(3) Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+^*$, puis en 0. Interpréter graphiquement ce dernier résultat. Déterminer les racines de f'.

(4) Etudier de même la dérivée seconde de f sur $\mathbb{R}_+^*$, puis en 0. En déduire que $\mathcal{G}_f$ admet un point d'inflexion I que l'on déterminera.

(5) Dresser le tableau de variations de f (avec la concavité de $\mathcal{G}_f$).

(6) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé (unité = 2cm).

Question 4 — 11 (=7+4) points

(1) Reprèsenter graphiquement dans un repère orthonormé (unité = 1 cm) la fonction $g : x \mapsto -1 - 4^{\frac{x}{3}}$ et ses asymptotes en partant du graphe de la fonction $x \mapsto 4^x$ et en explicitant les transformations géométriques utilisées.

(2) En déduire que g définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble B à préciser. Déterminer la bijection réciproque de g et la représenter graphiquement ensemble avec ses asymptotes dans le repère de la question précédente.

G. Lorang