Question 1

(1) On a :

$$\begin{aligned}
&2^{x+1}+2^{x+3}=2^{1-x}+2^{2-x}\\
&\Leftrightarrow 2\cdot 2^x+2^3\cdot 2^x=\frac{2}{2^x}+\frac{4}{2^x}\\
&\Leftrightarrow 10\cdot 2^x=\frac{6}{2^x}\,/:2\,/\cdot 2^x\\
&\Leftrightarrow 5\cdot 2^{2x}=3 \qquad .\\
&\Leftrightarrow 2^{2x}=\frac{3}{5}\\
&\Leftrightarrow 2x=\log_2\left(\frac{3}{5}\right)\\
&\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{3}{5}\right)
\end{aligned}$$

Donc : $S=\left\{\frac{1}{2}(\log_2 3-\log_2 5)\right\}$.

(2) On a la C.E. : $x>0$. L'inéquation s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\ln x^2+(\ln x-4)\ln^2 x\geq 0\\
&\Leftrightarrow 2\ln x+\ln^3 x-4\ln^2 x\geq 0
\end{aligned}$$

Posant $y=\ln x$, l'inéquation devient :

$$\begin{aligned}
&2y+y^3-4y^2\geq 0\\
&\Leftrightarrow y\left(y^2-4y+2\right)\geq 0
\end{aligned}$$

Les racines du trinôme entre parenthèses sont données par la V200 : $y=2\pm\sqrt{2}$.

y	$-\infty$	0		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$	$+\infty$
y	$-$	0	$+$		$+$		$+$
y^2-4y+2	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$y\left(y^2-4y+2\right)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
&0\leq y\leq 2-\sqrt{2}\ \text{ ou }\ y\geq 2+\sqrt{2}\\
&\Leftrightarrow 0\leq \ln x\leq 2-\sqrt{2}\ \text{ ou }\ \ln x\geq 2+\sqrt{2}\\
&\Leftrightarrow 1\leq x\leq e^{2-\sqrt{2}}\ \text{ ou }\ x\geq e^{2+\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Donc : $S=[1,e^{2-\sqrt{2}}]\cup[e^{2+\sqrt{2}},+\infty[$.

Question 2

(1) a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}_+^*$.

b) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x + 1}{e^x} \underset{(\mathrm{H})}{\overset{(\mathrm{f.i.}\frac{\infty}{\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + 1}{e^x} \underset{(\mathrm{H})}{\overset{(\mathrm{f.i.}\frac{\infty}{\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{xe^x} = 0$.

Donc $\mathcal{G}_f$ admet une A.H. à droite d'équation : $y = 0$.

c) Etude en 0 :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0} f(x) &= \lim_{x\to0} e^{-x} \cdot \lim_{x\to0} (x\ln x + 1) \\
&= 1 \cdot \left[\left(\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}}\right) + 1\right] \\
&= \left(\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}}\right) + 1 \\
&\underset{(\mathrm{H})}{\overset{(\mathrm{f.i.}\frac{\infty}{\infty})}{=}} \left(\lim_{x\to0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}}\right) + 1 \\
&= \lim_{x\to0^+} (-x) + 1 = 1
\end{aligned}$$

Il en résulte que f est prolongeable par continuité en 0. Le prolongement par continuité est :

$$g : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(2) a) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ g'(x) = -e^{-x}(x\ln x + 1) + e^{-x}(\ln x + 1) = e^{-x}(1-x)\ln x$

b) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0$ ou $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

c) Etude de la dérivabilité en 0 :

$$\begin{aligned}
\cancel{g'(0)} &= \lim_{x\to0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \\
&= \lim_{x\to0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \\
&\underset{(\mathrm{H})}{\overset{(\mathrm{f.i.}\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x\to0^+} g'(x) \\
&= \lim_{x\to0^+} \underbrace{e^{-x}}_{\to1} \underbrace{(1-x)}_{\to1} \ln x \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

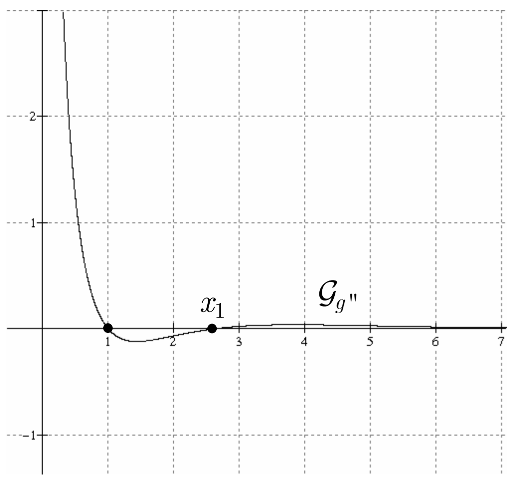
Donc g n'est pas dérivable en 0. $\mathcal{G}_g$ admet en (0,1) une demi-tangente verticale.

(3) a) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ g''(x) \underset{\mathrm{V200}}{=} \left[(x-2)\ln x - \dfrac{x-1}{x}\right] \cdot e^{-x}$

($g''(0)$ n'existe pas car g' n'est pas définie en 0.)

b) $g''(x) = 0 \underset{\mathrm{V200}}{\Leftrightarrow} x = 1$ ou $x = x_1 \cong 2{,}64$.

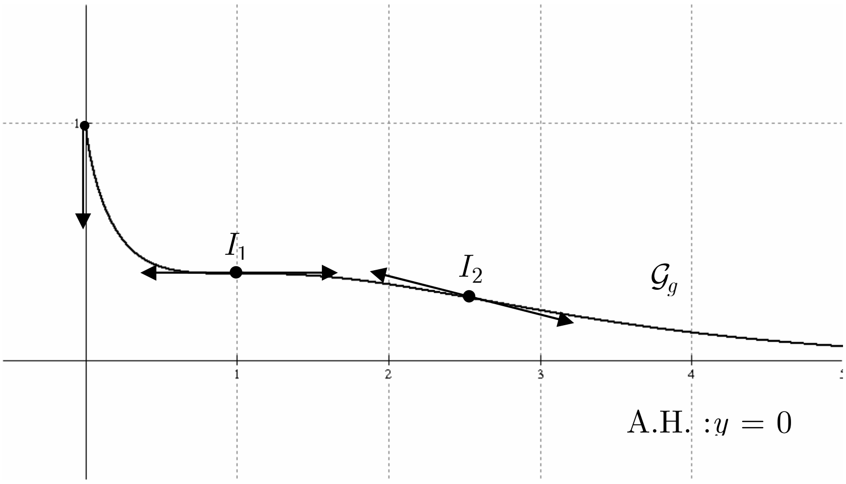
c) La V200 donne l'allure du graphe de g'': on observe que g'' s'annule et change de signe en $x = 1$ et en $x = x_1$. Il en résulte que $\mathcal{G}_g$ admet deux points d'inflexion : $I_1\left(1, \frac{1}{e}\right)$ et $I_2(2{,}64; 0{,}25)$.



(4) Tableau de variations :

x	0	1		$x_1 \cong 2{,}64$	$+\infty$
$g'(x)$	$\|$ -	0	-		-
$g''(x)$	$\|$ +	0	-	0	+
$g(x)$	1 (M) $\searrow$	$\frac{1}{e} \cong 0{,}37$	$\searrow$	$0{,}25$	$\searrow$ 0
$\mathcal{G}_g$		I_1		I_2	

(5) Représentation graphique :



Question 3

(1) a) C.E. $x \neq 0$ et $e^{\frac{1}{x}} \neq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \neq \ln 2 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{\ln 2} \cong 1{,}44$.

Donc : $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{\ln 2}\}$.

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow xe^{\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, à exclure. f n'a pas de racine.

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \underset{\text{V200}}{=} 0$, donc f admet un prolongement par continuité en 0 :

$$g : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq \frac{1}{\ln 2} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

d) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) \underset{\text{V200}}{=} \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} \underset{\text{V200}}{=} 1$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - x \underset{\text{V200}}{=} 2$, donc $\mathcal{G}_f$ admet une asymptote oblique (à gauche et à droite) : $y = x + 2$.

e) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{\ln 2}^{\pm}} f(x) \underset{\text{V200}}{=} \pm\infty$, donc $\mathcal{G}_f$ admet l'A.V. $x = \frac{1}{\ln 2}$.

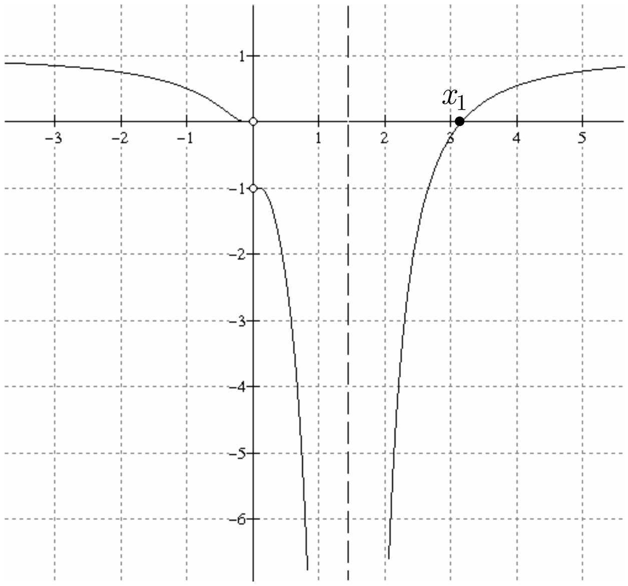
(2) a) $\left(\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0, \frac{1}{\ln 2}\}\right) \quad g'(x) \underset{\text{V200}}{=} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}\left[\left(e^{\frac{1}{x}}-2\right)x+2\right]}{x\left(e^{\frac{1}{x}}-2\right)^2}$.

b) $g'_d(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} \overset{(\text{f.i.}\frac{0}{0})}{\underset{(\text{H})}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} g'(x) \underset{\text{V200}}{=} -1$ et

$g'_g(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} \overset{(\text{f.i.}\frac{0}{0})}{\underset{(\text{H})}{=}} \lim\limits_{x\to 0^-} g'(x) \underset{\text{V200}}{=} 0$.

Donc g n'est pas dérivable en 0. Finalement : $\operatorname{dom} g' = \mathbb{R}\backslash\{0, \frac{1}{\ln 2}\}$.

d) Représentation graphique de g' :



e) $g'(x) \underset{\text{V200}}{=} 0 \Leftrightarrow x = x_1 \cong 3{,}18$.

(3) Tableau de variations :

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{\ln 2}$		$x_1 \cong 3{,}18$	$+\infty$
$g'(x)$	+ 0	//	-1 -	//	-	0	-
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0 (M)	↘ $-\infty$	// (A.V.) //	$+\infty$ ↘	6,91 (m)	↗ $+\infty$

(4) Représentation graphique de g :