Question 1

(1) $$\int f(x)\,dx = \int \frac{5x^6}{2-3x^7}\,dx = -\frac{5}{21}\int \frac{-21x^6}{2-3x^7}\,dx = -\frac{5}{21}\ln\left|2-3x^7\right| + k$$

$$\boxed{\begin{aligned} u(x) &= 2-3x^7 \\ u'(x) &= -21x^6 \\ \int \frac{u'}{u}\,dx &= \ln|u| + k \end{aligned}}$$

Expression valable sur un intervalle ne contenant pas $\sqrt[7]{\frac{2}{3}}$.

(2) $$\begin{aligned} \int g(x)\,dx &= \int \frac{x^2}{2}\sqrt{\frac{x}{2}-1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int (2t+2)^2\sqrt{t}\cdot 2dt \\ &= 4\int \left(t^2\sqrt{t} + 2t\sqrt{t} + \sqrt{t}\right)dt \\ &= 4\int \left(t^{\frac{5}{2}} + 2t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}}\right)dt \\ &= 4\cdot\left(\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} + 2\cdot\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right) + k \\ &= 8t^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{7}t^2 + \frac{2}{5}t + \frac{1}{3}\right) + k \\ &\underset{V200}{=} \sqrt{2}(x-2)\sqrt{x-2}\left(\frac{x^2}{14} + \frac{4x}{35} + \frac{16}{105}\right) + k \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Changement de variables :} \\ &t = \frac{x}{2} - 1 \Leftrightarrow x = 2t+2 \\ &dx = 2dt \end{aligned}}$$

Expression valable sur $[2,+\infty[$.

(3) $$\begin{aligned} &\int h(x)\,dx \\ &= 2\cdot\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin\sqrt{x}dx \\ &= -2\cos\sqrt{x} + k \end{aligned}$$

$$\boxed{u(x) = \sqrt{x} \qquad u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \int u'\sin u\,dx = -\cos u + k}$$

Expression valable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(4) $$\begin{aligned} \int k(x)\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}\cdot \operatorname{Arcsin}^3(2x)}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}\cdot \operatorname{Arcsin}^3(2x)}\,dx \\ &= -\frac{1}{4\operatorname{Arcsin}^2(2x)} + c \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u(x) &= \operatorname{Arcsin}(2x) \\ u'(x) &= \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \\ \int u'u^{-3}\,dx &= -\frac{1}{2u^2} + k \end{aligned}}$$

Expression valable sur un intervalle de $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\setminus\{0\}$, c.-à-d. p.ex. sur $]-\frac{1}{2},0[$ ou sur $]0,\frac{1}{2}[$.

(5) $\displaystyle\int i(x)\,dx$

$$= \int \left(x^2+x-1\right)\ln|x|\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right)\ln|x| - \int\left(\frac{x^2}{3}+\frac{x}{2}-1\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right)\ln|x| - \frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{4}+x+k$$

Intégration par parties :

$f(x)=\ln|x|$ $\quad g(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-x$

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ $\quad g'(x)=x^2+x-1$

Expression valable sur un intervalle ne contenant pas 0.

(6) $\displaystyle\int j(x)\,dx = \int \frac{x^2+7x+1}{(3x-2)^2(x+1)}dx$

$$\underset{V200}{=}\int \frac{14}{15(3x-2)}+\frac{11}{3(3x-2)^2}-\frac{1}{5(x+1)}dx$$

$$= \frac{14}{45}\int\frac{3}{(3x-2)}dx - \frac{11}{9}\int\frac{-3}{(3x-2)^2}dx - \frac{1}{5}\int\frac{1}{x+1}dx$$

$$= \frac{14}{45}\ln|3x-2| - \frac{11}{9(3x-2)} - \frac{1}{5}\ln|x+1| + k$$

Expression valable sur un intervalle ne contenant ni -1, ni $\frac{2}{3}$.

(7) $\displaystyle\int m(x)\,dx = \int\frac{3}{x^2+2x+4}dx$

$$= \int\frac{3}{\left(x^2+2x+1\right)+3}dx$$

$$= \int\frac{3}{(x+1)^2+3}dx$$

$$= \int\frac{3}{3\left(\frac{x+1}{\sqrt3}\right)^2+3}dx$$

$$= \sqrt3\int\frac{\frac{1}{\sqrt3}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt3}\right)^2+1}dx$$

$$= \sqrt3\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x+1}{\sqrt3}\right)+k$$

Expression valable sur $\mathbb{R}$.

Question 2

$$f : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{Arctan}(2\ln x) & \text{si } x \neq 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(1) C.E. : $\ln x$ existe $x>0$. Comme $f(0)$ est défini à part, on a : $\boxed{\mathrm{dom}\,f = \mathbb{R}_+}$. Il est clair que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Etudions la continuité en 0 :

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{y\to-\infty} \operatorname{Arctan} y = -\frac{\pi}{2} = f(0)$. Donc f est continue en 0.

$$\boxed{\operatorname{dom}_c f = \mathbb{R}_+}$$

- $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{(\mathrm{H})}{=} \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$

Or : $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{x}}{1+4\ln^2 x} = \dfrac{2}{x\left(1+4\ln^2 x\right)}$, pour $x > 0$.

Par conséquent :

$$\cancel{f'(0)} \underset{(\mathrm{H})}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{x}}{1+4\ln^2 x} \underset{(\mathrm{H})}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{2}{x^2}}{8\cdot\frac{\ln x}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{4\ln x} \underset{(\mathrm{H})}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{4x} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

$$\boxed{\operatorname{dom}_d f = \mathbb{R}_+^*}$$

Le graphe $\mathcal{G}_f$ admet en $\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$ une demi-tangente verticale d'équation : $x = 0, y \geq -\frac{\pi}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{y\to+\infty} \operatorname{Arctan} y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ A.H. : $y = \frac{\pi}{2}$.

(3) On a déjà vu que :

$$f'(x) = \frac{2}{x\left(1+4\ln^2 x\right)}, \text{ pour } x > 0.$$

La dérivée étant toujours strictement positive, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(4) $$f''(x) = \frac{-2\left[1+4\ln^2 x + \left(\frac{8x\ln x}{x}\right)\right]}{x^2\left(1+4\ln^2 x\right)^2} = \frac{-2\left[4\ln^2 x + 8\ln x + 1\right]}{x^2\left(1+4\ln^2 x\right)^2}, \text{ pour } x > 0$$

Le dénominateur étant toujours >0, il reste à étudier le signe du numérateur. On résout d'abord l'équation $4\ln^2 x + 8\ln x + 1 = 0$, en posant $y = \ln x$. L'équation est alors rationnelle, la V200 donne les racines $y = \frac{-2\pm\sqrt{3}}{2}$, d'où : $x = e^{\frac{-2\pm\sqrt{3}}{2}}$.

y	$-\infty$	$\frac{-2-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{-2+\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
$4y^2+8y+1$	$+$	0	$-$	0	$+$
x	0	$e^{\frac{-2-\sqrt{3}}{2}}$		$e^{\frac{-2+\sqrt{3}}{2}}$	$+\infty$
$4\ln^2 x + 8\ln x + 1$	‖ $+$	0	$-$	0	$+$

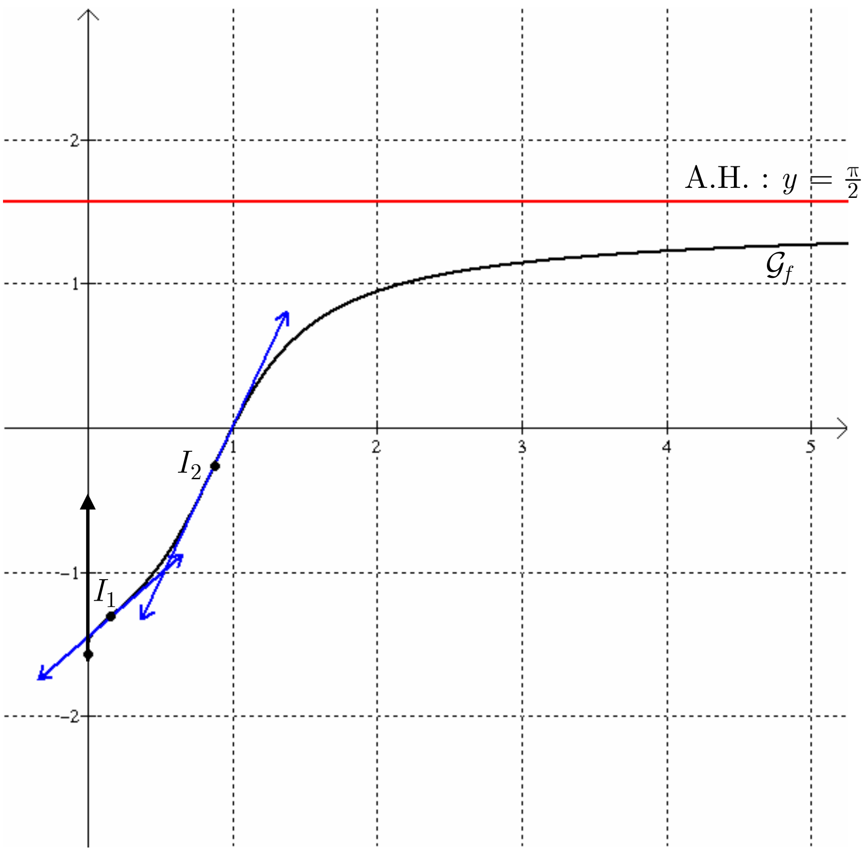
Comme f'' change de signe en les deux racines, donc $\mathcal{G}_f$ admet deux points d'inflexions :

- $I_1\left(e^{\frac{-2-\sqrt{3}}{2}}, f\left(e^{\frac{-2-\sqrt{3}}{2}}\right)\right) \underset{V200}{=} I_1\left(e^{\frac{-2-\sqrt{3}}{2}}, -\frac{5\pi}{12}\right) \simeq I_1(0{,}155, -1{,}309)$
- $I_2\left(e^{\frac{-2+\sqrt{3}}{2}}, f\left(e^{\frac{-2+\sqrt{3}}{2}}\right)\right) \underset{V200}{=} I_2\left(e^{\frac{-2+\sqrt{3}}{2}}, -\frac{\pi}{12}\right) \simeq I_2(0{,}875; -0{,}262)$

(5) Tableau de variations :

x	0	$e^{\frac{-2-\sqrt{3}}{2}}$		$\frac{-2+\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$ $+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$\|\|$ $-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$ (m)	$-\frac{5\pi}{12}$		$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
$\mathcal{G}_f$		I_1		I_2	

(6) Représentation graphique :



G. Lorang