Remarque : L'utilisation de la V200 est autorisée tout au cours de l'épreuve dans les limites imposées par le programme.

Question 1 — 14 (=8+6) points

(1) Démontrer que si f est une fonction continue sur $[a,b]$ (avec $a < b$), alors la fonction $G : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a,b]$ et $G' = f$.

(2) En déduire que : si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et si F est une primitive quelconque de f sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

Question 2 — 16 (=6+10) points

(1) Calculer l'intégrale indéfinie $\int \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$ où r est un réel > 0 donné.

(2) Le plan étant rapporté à un repère orthonormé et l'unité choisie le cm, on demande de calculer l'aire de la surface délimitée par les courbes $\mathcal{P} \equiv y = 4 - x^2$ et $\mathcal{C} : x^2 + (y-5)^2 \equiv 5$.

Question 3 — 30 (=2+8+9+4+3+4) points

On considère les fonctions $f : x \mapsto \ln(1 + e^x) \cdot e^x$ et $g : x \mapsto x \cdot e^x$. On note $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ leurs graphes respectifs dans un repère orthonormé du plan (unité = 1 cm).

(1) Esquisser $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ avec la V200 en faisant varier x et y dans des intervalles raisonnablement choisis, puis reproduire l'allure des courbes sur votre feuille.

(2) Justifier les points suivants observés sur le graphique :

a) $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ admettent Ox comme asymptote horizontale à gauche.

b) $\mathcal{F}$ est au-dessus de Ox sur $\mathbb{R}$.

c) $\mathcal{G}$ est en-dessous de Ox sur $\mathbb{R}_-$.

(3) Determiner l'ensemble des primitives de f et de g sur un intervalle aussi grand que possible.

(4) Calculer $A(\lambda) = \int_{-\lambda}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$ et en déduire $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$, notée A.

(5) Calculer $B(\lambda) = -\int_{-\lambda}^0 g(x)\,\mathrm{d}x$ et en déduire $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} B(\lambda)$, notée B.

(6) Interpréter graphiquement les réels A, B et $A + B$.

G. Lorang