Question 1

(1) Soit $f : x \mapsto y = (x-6)\left(x^2-4\right)$ et $g : x \mapsto \frac{1}{4}\sqrt{f(x)}$. Etudions le signe de f :

x	$-\infty$	-2		2		6	$+\infty$
$x-6$	–		–		–	0	+
x^2-4	+	0	–	0	+		+
$f(x)$	–	0	+	0	–	0	+

Le domaine de la fonction g est donc $[-2,2]\cup[6,+\infty[$. La surface génératrice du volume de révolution cherché étant ***finie*** par hypothèse, elle doit nécessairement se situer entre les bornes $x=-2$ et $x=2$. Donc :

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_{-2}^{2}\left[\frac{1}{4}\sqrt{f(x)}\right]^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{16}\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\underset{V200}{=} \frac{\pi}{16}\int_{-2}^{2} x^3-6x^2-4x+24\,\mathrm{d}x \\
&= \pi\left[\frac{x^4}{4}-2x^3-2x^2+24x\right]_{-2}^{2} \\
&\underset{V200}{=} 4\pi \text{ u.v.}
\end{aligned}$$

(2) Le solide de révolution a la forme d'un œuf pour plusieurs raisons :

a) Il est bien rond en ses « sommets » puisque $\mathcal{G}_g$ admet en $x=-2$ et $x=2$ deux ***demi-tangentes verticales***. En effet :

$$(\forall x\in\,]-2,2[)\;\; g'(x)=\frac{f'(x)}{8\sqrt{f(x)}}=\frac{3x^2-12x-4}{8\sqrt{f(x)}}$$

$$\text{et}\;\; \lim_{x\to-2^+} g'(x)=\frac{32}{8\cdot 0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} g'(x)=\frac{-16}{8\cdot 0^+}=-\infty$$

b) Le solide a une forme « asymétrique », c.-à-d. son diamètre maximal n'est pas atteint en $x=0$. En effet :

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x-4=0 \underset{\text{V200}}{\Leftrightarrow} x=2\pm\frac{4}{\sqrt{3}} \text{ (V200)}$$

Le maximum de la fonction g est donc atteint en $x=2-\frac{4}{\sqrt{3}}\cong-0{,}31$.

c) La fonction g croît sur $\left[-2,2-\frac{4}{\sqrt{3}}\right]$ et décroît sur $\left[2-\frac{4}{\sqrt{3}},2\right]$.

d) La dérivée seconde de g est strictement négative sur]-2,2[, ce qui se traduit par le fait que le solide de révolution est ***convexe***. En effet,

$$g''(x) = \frac{f''(x)\sqrt{f(x)} - f'(x)\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}}{8f(x)}$$

$$= \frac{2f''(x)f(x) - f'(x)^2}{16f(x)\sqrt{f(x)}}$$

$$= \frac{2(6x-12)(x-6)\left(x^2-4\right) - \left(3x^2-12x-4\right)^2}{8f(x)\sqrt{f(x)}}$$

$$\underset{V200}{=} \frac{3x^4 - 24x^3 - 24x^2 + 288x - 592}{8f(x)\sqrt{f(x)}}$$

Pour étudier le signe de $g''(x)$ sur]-2,2[, on factorise l'expression à l'aide de la V200 et on trouve le « monstre » suivant (racines approchées !) :

$$g''(x) \underset{V200}{=} \frac{(3x-23{,}6146779)(3x+11{,}6146779)\left(x^2-4x+6{,}475208614\right)}{24f(x)\sqrt{f(x)}}$$

On se convainc aisément que tous les facteurs sont positifs sur [-2,2], sauf $(3x-23{,}6146779)$, qui est <0. Par conséquent, g'' est strictement négative sur]-2,2[.

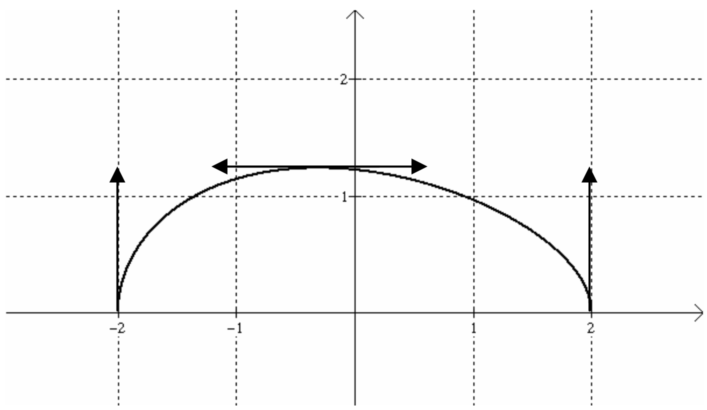
Remarque : L'argument concernant la dérivée seconde n'a pas été exigé de la part des élèves !

(3) La valeur de ce maximum vaut :

$$g\left(2-\frac{4}{\sqrt{3}}\right) \underset{V200}{=} \frac{3^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{5}{2}}}{6} = \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{3}}{3} \cong 1{,}24\,.$$

Le diamètre maximal obtenu en coupant l'oeuf par un plan perpendiculaire à l'axe de symétrie est donc :

$$2\cdot g\left(2-\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{3}}{3} \cong 2{,}48$$



Question 2

(1) Les conditions nécessaires et suffisantes qui déterminent p sont :

$$\begin{cases} p(1) = 1 & \text{car le raccord en } A \text{ est continu} \\ p(-1) = -1 & \text{car le raccord en } C \text{ est continu} \\ p'(1) = p'(-1) = 0 & \text{car les raccords en } A \text{ et en } C \text{ sont "tangentiels"} \\ p''(1) = p''(-1) = 0 & \text{car les raccords en } A \text{ et en } C \text{ sont "sans heurts"} \end{cases}$$

Comme il y a en tout 6 conditions, le degré de p est au plus égal à 5. Mais de plus, vu la symétrie du problème (ou des conditions), il est clair que p est impair, donc le terme constant et les termes en x^2 et en x^4 sont nuls. En d'autres termes : $p(x) = ax^5 + bx^3 + cx$.

Pour déterminer les constantes a, b et c il suffit de résoudre le système formé par les 3 équations $p(1) = 1$, $p'(1) = 0$ et $p''(1) = 0$. La V200 donne :

$$p(x) = \frac{3}{8}x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{15}{8}x\,,$$

c.-à-d. $a = \dfrac{3}{8}$, $b = -\dfrac{5}{4}$ et $c = \dfrac{15}{8}$.

(2) La V200 donne : $p'(x) = \dfrac{15}{8}x^4 - \dfrac{15}{4}x^2 + \dfrac{15}{8} = \dfrac{15}{8}(x-1)^2(x+1)^2$.

Cette factorisation provient du fait que 1 et –1 sont des racines doubles de $p'(x)$, puisque $p'(\pm 1) = 0$ et $p''(\pm 1) = 0$.

(3) De façon analogue à la question précédente on peut affirmer que $q'(x)$ admet les deux racines doubles 2 et 3. Comme q' est également du 4e degré, on a donc nécessairement :

$$q'(x) = d(x-2)^2(x-3)^2.$$

Par intégration on obtient que :

$$\begin{aligned} q(x) &= d\int (x-2)^2(x-3)^2\,\mathrm{d}x + e \\ &\underset{V200}{=} d\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{37}{3}x^3 - 30x^2 + 36x\right) + e \end{aligned}$$

On détermine les constantes d et e en résolvant le système :

$$\begin{cases} q(2) = 1 \\ q(3) = 0 \end{cases}$$

On trouve $d = -30$ et $e = 513$. En substituant ces résultats dans l'expression de $q(x)$, on trouve :

$$\begin{aligned} q(x) &= -6x^5 + 75x^4 - 370x^3 + 900x^2 - 1080x + 513 \\ &= -(x-3)^3\left(6x^2 - 21x + 19\right) \end{aligned}$$

Il est clair que q admet la racine triple 3 puisque $q(3) = q'(3) = q''(3) = 0$.

(4) $x \mapsto p(x)$

$\downarrow$ diviser les abscisses par 2

$x \mapsto p(2x)$

$\downarrow$ diviser les ordonnées par 2

(Géométriquement, les 2 opérations correspondent à l'homothétie (« zoom ») de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$.)

$x \mapsto \dfrac{1}{2}\,p(2x)$

$\downarrow$ multiplier les ordonnées par -1 (symétrie par rapport à Ox)

$x \mapsto -\dfrac{1}{2}\,p(2x)$

$\downarrow$ additionner $\frac{1}{2}$ aux ordonnées (translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{j}$)

$x \mapsto -\dfrac{1}{2}\,p(2x) + \dfrac{1}{2}$

$\downarrow$ additionner $\frac{5}{2}$ aux abscisses (translation de vecteur $\frac{5}{2}\vec{i}$)

$q : x \mapsto -\dfrac{1}{2}\,p\Big(2\Big(x - \dfrac{5}{2}\Big)\Big) + \dfrac{1}{2}$

Par conséquent : $q(x) = -\dfrac{1}{2}\,p(2x-5) + \dfrac{1}{2}$.

On vérifie à l'aide de la V200 et on retrouve bien :

$$q(x) = -6x^5 + 75x^4 - 370x^3 + 900x^2 - 1080x + 513\,.$$

(5) Les longueurs demandées valent approximativement :

$l_{\widehat{AC}} = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + p'(x)^2}\,\mathrm{d}x \cong 3{,}002930076$ u.l.

$l_{\widehat{BD}} = \displaystyle\int_{2}^{3} \sqrt{1 + q'(x)^2}\,\mathrm{d}x \cong 1{,}501465122$ u.l.

On remarque que $l_{\widehat{AC}} \cong 2 \cdot l_{\widehat{BD}}$. Numériquement, il reste une petite différence, due aux erreurs d'arrondis de la V200. D'où le besoin de démontrer rigoureusement l'égalité $l_{\widehat{AC}} = 2 \cdot l_{\widehat{BD}}$.

a) Géométriquement, c'est l'homothétie qui multiplie les longeurs par $\frac{1}{2}$ à la question 4. Les translations et la symétrie conservent les longueurs !

b) On peut aussi justifier l'égalité $l_{\widehat{AC}} = 2 \cdot l_{\widehat{BD}}$ par un calcul intégral en remarquant au préalable que :

$$q'(x) = -\frac{1}{2}\,p'(2x-5) \cdot 2 = -p'(2x-5)\,.$$

Donc :

$$\begin{aligned} l_{\widehat{BD}} &= \int_2^3 \sqrt{1 + q'(x)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_2^3 \sqrt{1 + p'(2x-5)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + p'(t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot l_{\widehat{AC}} \end{aligned}$$

Substitution :
$t = 2x - 5$
$\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$

x	2	3
t	-1	1

G. Lorang