Question 1

L'intégrale existe puisque l'intégrand est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. En effet, le dénominateur $1+2\cos^2 x$ ne s'annule jamais. De plus, l'intégrand étant une fraction rationnelle ***paire*** en $\cos x$, on peut faire la substitution :

$$t=\tan x\,,\ \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\mathrm{d}x \text{ et } \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	0	1

Donc :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+2\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+\dfrac{2}{1+t^2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{3+t^2} \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}\mathrm{d}u}{3+3u^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}[\operatorname{Arctan} u]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{\pi}{6\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

$t=\sqrt{3}u,\ \mathrm{d}t=\sqrt{3}\ \mathrm{d}u$

t	0	1
u	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

.

Question 2

C.E. :

$$\begin{cases} 3x-x^2>0 \Leftrightarrow x(3-x)>0 \Leftrightarrow 0<x<3 \\ \dfrac{1}{x}>0 \Leftrightarrow x>0 \\ x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\,]0,3[\,\setminus\{1\}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
&\log_{\frac{1}{4}}\left(3x-x^2\right)-\log_2\frac{1}{x}+\log_4|x-1|=0 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\log_2\left(3x-x^2\right)}{-2}+\log_2 x+\frac{\log_2|x-1|}{2}=0\,/\cdot(-2)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(3x - x^2\right) = 2\log_2 x + \log_2|x-1|$$
$$\Leftrightarrow \log_2\left(3x - x^2\right) = \log_2 x^2|x-1|$$
$$\Leftrightarrow x(3-x) = x^2|x-1|$$
$$\Leftrightarrow 3 - x = x|x-1|$$

On a pu diviser les 2 membres par x car $x \neq 0$ (cf. C.E.).

Si $x > 1$ alors l'équation devient : $3 - x = x(x-1) \underset{V200}{\Leftrightarrow} x = \pm\sqrt{3}$.

Si $x < 1$ alors l'équation devient : $3 - x = x(1-x)$ et n'a pas de solution (V200).

Finalement, en tenant compte des C.E. on a : $S = \left\{\sqrt{3}\right\}$.

Question 3

(1) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc :

$$\operatorname{dom} f = \operatorname{dom}_c f = \operatorname{dom}_d f = \mathbb{R}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2^{x+1} - 4^x = 0 - 0 = 0 \Rightarrow$ A.H. $y = 0$ à gauche.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2^{x+1} - 4^x = \lim\limits_{x\to+\infty} 2^x(2 - 2^x) = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$;

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2^{x+1} - 4^x}{x} \\
&\underset{H}{\overset{\text{f.i.} \frac{-\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \ln 2 \cdot 2^{x+1} - \ln 4 \cdot 4^x \\
&= \lim_{x\to+\infty} 2\ln 2 \cdot 2^x(1 - 2^x) \\
&= -\infty.
\end{aligned}$$

Donc : B.P. de direction Oy à droite.

(3) $(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x) = 2\ln 2 \cdot (2^x - 4^x) = 2\ln 2 \cdot 2^x(1 - 2^x)$.

Donc : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$

D'où le tableau des variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0 $\nearrow$	1 (M)	$\searrow$ $-\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = m$ admet :

- 0 solution si $m > 1$;
- 1 solution si $m = 1$ ou $m \leq 0$;
- 2 solutions si $0 < m < 1$.

(4) $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f''(x) = 2\ln 2 \cdot (\ln 2 \cdot 2^x - 2\ln 2 \cdot 4^x) = 2\ln^2 2 \cdot 2^x \cdot \left(1 - 2^{x+1}\right)$.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = -1.$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2^{x+1} < 1 \Leftrightarrow x < -1.$$

f'' s'annule et change de signe en $x = -1$, donc $I\left(-1, \frac{3}{4}\right)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{G}_f$. Equation de la tangente à $\mathcal{G}_f$ en I :

$$y = f'(-1)(x+1) + f(1) \underset{V200}{\Leftrightarrow} y = \frac{\ln 2}{2}x + \frac{2\ln 2 + 3}{4}$$

(5) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$, donc $g = f|_{\mathbb{R}_-}$ est une bijection de $\mathbb{R}_-$ sur $B = f(\mathbb{R}_-) =]0,1]$. Déterminons la bijection réciproque de g :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_-)(\forall y \in]0,1]) \quad f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 2^x - (2^x)^2 = y$$

$$\Leftrightarrow 2u - u^2 = y$$

où l'on a posé : $u = 2^x$. Il faut remarquer que $0 < u \leq 1$ puisque $x \leq 0$. On résout la dernière équation avec la V200 et on obtient :

$$u = 1 - \sqrt{1-y} \text{ ou } u = 1 + \sqrt{1-y}.$$

Les deux solutions existent bien, car $1 - y \geq 0$, mais seule la première est ≤ 1 et > 0. Donc :

$$f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 1 - \sqrt{1-y}$$

$$\Leftrightarrow x = \log_2\left(1 - \sqrt{1-y}\right)$$

Donc : $g^{-1} :]0,1] \to \mathbb{R}_-, x \mapsto \log_2\left(1 - \sqrt{1-x}\right)$.

(6) On détermine d'abord la racine unique de f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^{2x} \Leftrightarrow x + 1 = 2x \Leftrightarrow x = 1.$$

Donc :

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^1 2^{x+1} - 4^x \, \mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{2^{x+1}}{\ln 2} - \frac{4^x}{\ln 4}\right]_\lambda^1$$

$$\underset{V200}{=} \frac{4^\lambda - 4 \cdot 2^\lambda + 4}{2\ln 2}$$

Finalement : $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \dfrac{4}{2\ln 2} = \dfrac{2}{\ln 2}$.

C'est l'aire de la partie infinie du plan délimitée par $\mathcal{G}_f$ et la demi-droite : $y = 0, x \leq 1$.

G. Lorang