

## Question 1

12 points

Justifier l'existence de  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + 2 \cos^2 x} dx$ , puis calculer cette intégrale.

## Question 2

12 points

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

$$\log_{\frac{1}{4}}(3x - x^2) - \log_2 \frac{1}{x} + \log_4 |x - 1| = 0.$$

## Question 3

36 (=2+6+8+6+8+6) points

On considère la fonction

$$f : x \mapsto 2^{x+1} - 4^x$$

- (1) Quels sont les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de  $f$  ?
- (2) Etudier le comportement asymptotique de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- (3) Etablir le tableau des variations de  $f$  (sans l'étude de la concavité). En déduire le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = m$ , où  $m$  est un paramètre réel.
- (4) Justifier que  $\mathcal{G}_f$  admet un point d'inflexion  $I$ , puis établir l'équation de la tangente à  $\mathcal{G}_f$  au point  $I$ .
- (5) Justifier que la restriction de  $f$  à  $\mathbb{R}_-$ , notée  $g$ , définit une bijection de  $\mathbb{R}_-$  sur un intervalle  $B$  que l'on précisera. Déterminer la bijection réciproque de  $g$ .
- (6) Déterminer l'aire  $\mathcal{A}(\lambda)$  de la *partie* du plan délimitée par  $\mathcal{G}_f$ , l'axe des abscisses et la droite d'équation  $x = \lambda$ , où  $\lambda < 0$ . En déduire

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\lambda),$$

et interpréter graphiquement ce résultat.

**Bonus (6 p.)** : Etudier la position de  $\mathcal{G}_f$  par rapport à la tangente de la question (4) sans utiliser la V200 ! (Question uniquement destinée aux personnes qui ont *tout* fait et s'ennuient ... !)