Question 1

(1)

$$f: \begin{array}{rcl} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\sqrt{1-x^2} \end{array}$$

$dom\ f = [0;1]$

$(\forall x \in dom\ f) \qquad f(x) \geqslant 0$

$D = \{M(x;y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

$$\mathcal{A}(D) = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = \left[-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \text{ u.a.}$$

(2)

$$I = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$$

Posons : $x = \dfrac{1}{t}$. On a : $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{t^2} \Longrightarrow dx = -\dfrac{1}{t^2}dt$

et $\quad x = \sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\quad x = 2 \quad \Longrightarrow \quad t = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned} I &= \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt \\ &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \\ &= = -\left[\text{Arcsin } t\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

(3)

$$I(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int_0^\lambda \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\left[\text{Arctan}\frac{x}{2}\right]_0^\lambda = \frac{1}{2}\text{Arctan}\frac{\lambda}{2}$$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I(\lambda) = \dfrac{\pi}{4} \qquad$ [car $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{Arctan } x = \dfrac{\pi}{2}$].

(4)

$$\int_1^2 x2^{-x^2}dx = \int_1^2 xe^{-x^2\ln 2}dx = -\frac{1}{2\ln 2}\int_1^2 -2x(\ln 2)\,e^{-x^2\ln 2}dx = -\frac{1}{2\ln 2}\left[e^{-x^2\ln 2}\right]_1^2 = \frac{7}{32\ln 2}$$

Question 2

Soit $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}\,(x-3)$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$. Donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \frac{\pi}{9}\int_0^3 x(x-3)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{9}\int_0^3 x^3 - 6x^2 + 9x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{9}\left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2}\right]_0^3 \\ &= \frac{\pi}{9}\left(\frac{81}{4} - 54 + \frac{81}{2}\right) \\ &= \frac{3\pi}{4}\ \text{u.v.}\end{aligned}$$

Question 3

(1) a) $\mathrm{dom}_f = \mathrm{dom}_c\, f = \mathbb{R}$

b) f est paire car $f(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2} = f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, donc pas d'A.H.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{e^x + e^{-x}}{2x} \overset{\text{f.i.}\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \pm\infty$, donc pas d'A.O.

d) $\mathrm{dom}\, f' = \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$;

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1 (m)	↗ $+\infty$

(2) g est injective car g est strictement croissante. $\mathrm{im}\, g = [1,+\infty[$.

(3) Soit $y \in [1,+\infty[$.

$$\begin{aligned} & g(x) = y \\ \Leftrightarrow\ & \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow e^{x} + e^{-x} = 2y \,/\cdot\, e^{x}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^{x} + 1 = 0$$

Posons $t = e^{x}, t > 0$. Alors l'équation devient : $t^2 - 2yt + 1 = 0$.

$\Delta = 4y^2 - 4 = 4\left(y^2 - 1\right)$; comme $y \geq 1$, on a $\Delta \geq 0$.

Racines de l'équation en t : $t = \dfrac{2y \pm 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$.

Revenons à x :

$$e^{x} = y - \sqrt{y^2 - 1} \text{ ou } e^{x} = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

$$x = \ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right) \text{ ou } x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

En considérant le tableau de variation de *f*, il est clair que l'une des deux solutions (à savoir la 1$^{\text{re}}$) est négative, la seconde (positive) est la bonne solution de l'équation, car elle appartient au domaine de *g*.

Donc : $g^{-1} : [1, +\infty[\; \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.