

Question 1

(1)

$$\begin{aligned}
 f : [0; 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 x &\longmapsto x\sqrt{1-x^2} \\
 \text{dom } f &= [0; 1] \\
 (\forall x \in \text{dom } f) \quad &f(x) \geq 0 \\
 D &= \{M(x; y) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\} \\
 \mathcal{A}(D) &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = \left[-\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx \\
 \text{Posons : } x &= \frac{1}{t}. \text{ On a : } \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2} \implies dx = -\frac{1}{t^2} dt \\
 \text{et } x &= \sqrt{2} \implies t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 x &= 2 \implies t = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt \\
 &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
 &= -[\text{Arcsin } t]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 I(\lambda) &= \int_0^\lambda \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int_0^\lambda \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \left[\text{Arctan} \frac{x}{2} \right]_0^\lambda = \frac{1}{2} \text{Arctan} \frac{\lambda}{2} \\
 \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda) &= \frac{\pi}{4} \quad [\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan } x = \frac{\pi}{2}].
 \end{aligned}$$

(4)

$$\int_1^2 x 2^{-x^2} dx = \int_1^2 x e^{-x^2 \ln 2} dx = -\frac{1}{2 \ln 2} \int_1^2 -2x (\ln 2) e^{-x^2 \ln 2} dx = -\frac{1}{2 \ln 2} \left[e^{-x^2 \ln 2} \right]_1^2 = \frac{7}{32 \ln 2}$$

Question 2

Soit $f(x) = \frac{1}{3} \sqrt{x}(x-3)$. f est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$. Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{\pi}{9} \int_0^3 x(x-3)^2 dx \\ &= \frac{\pi}{9} \int_0^3 x^3 - 6x^2 + 9x dx \\ &= \frac{\pi}{9} \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2} \right]_0^3 \\ &= \frac{\pi}{9} \left(\frac{81}{4} - 54 + \frac{81}{2} \right) \\ &= \frac{3\pi}{4} \text{ u.v.} \end{aligned}$$

Question 3

(1) a) $\text{dom}_f = \text{dom}_c f = \mathbb{R}$

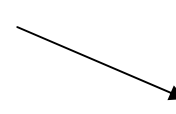
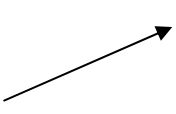
b) f est paire car $f(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, donc pas d'A.H.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2x} \stackrel{\text{f.i.}\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \pm\infty, \text{ donc pas d'A.O.}$$

d) $\text{dom } f' = \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0 ;$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$ 	1 (m)	$+\infty$ 

(2) g est injective car g est strictement croissante. $\text{im } g = [1, +\infty[$.

(3) Soit $y \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} g(x) &= y \\ \Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= y \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 2y / \cdot e^x$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

Posons $t = e^x, t > 0$. Alors l'équation devient : $t^2 - 2yt + 1 = 0$.

$\Delta = 4y^2 - 4 = 4(y^2 - 1)$; comme $y \geq 1$, on a $\Delta \geq 0$.

Racines de l'équation en t : $t = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$.

Revenons à x :

$$e^x = y - \sqrt{y^2 - 1} \text{ ou } e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

$$x = \ln(y - \sqrt{y^2 - 1}) \text{ ou } x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

En considérant le tableau de variation de f , il est clair que l'une des deux solutions (à savoir la 1^{re}) est négative, la seconde (positive) est la bonne solution de l'équation, car elle appartient au domaine de g .

Donc : $g^{-1} : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.