

Partie sans V200 : 60 minutes

Question 1

12 (2+2+7+1) points

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}(x \ln x + 1) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- (1) Etudier la continuité de f en 0 et en déduire le domaine de continuité de f .
- (2) Déterminer le comportement asymptotique de f en $+\infty$.
- (3) Etudier la dérivabilité de f en $x > 0$, puis en $x = 0$. En déduire le domaine de dérivabilité de f et le tableau de variation de f . Préciser la nature des points d'abscisses 0 et 1.
- (4) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé du plan (unité = 2 cm).

Question 2

10 (=5+5) points

- (1) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation :

$$\log_x \sqrt{1-x} + \log_{x^2} (x+5) \geq 0$$

- (2) Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel m le **nombre** de solutions de l'équation suivante dans \mathbb{R} :

$$4^x - 2^{x+1} = m \quad (E_m)$$

Question 3

8 (=4+4) points

Calculer les intégrales définies suivantes :

- (1) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^4 x \, dx$

- (2) $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + 2 \cos^2 x} \, dx$ (poser : $\tan x = t$)

Partie avec V200 : 60 minutes, 30 points

L'évolution de la concentration d'un médicament dans le sang peut être décrite par une fonction f dont l'expression est du type

$$f(t) = a(e^{-bt} - e^{-t})$$

où a et b sont des constantes strictement positives,

t désigne le temps en heures après la prise du médicament qui s'effectue au moment $t = 0$, $f(t)$ est exprimé en millilitres par litre de sang.

- a)
 - i. Vérifier qu'à l'instant $t = 0$, la concentration dans le sang est nulle.
 - ii. Déterminer la constante b , sachant que la concentration est maximale à l'instant $t = 2 \ln 2$.
 - iii. En prenant $b = \frac{1}{2}$, déterminer la constante a , sachant que la concentration maximale est de 2,5 ml/l.
- b) Les constantes a et b dépendent du médicament administré. Pour un autre médicament, on a : $a = 11$. Déterminer alors la constante b pour qu'après 6 heures la concentration soit de 2 millilitres par litre de sang. Quelle est alors la concentration maximale? A quel moment est-elle atteinte?
- c) On prend : $a = 10$ et $b = \frac{1}{2}$.
 - i. Faire une brève étude de f [domaine, comportement asymptotique, variations, graphique].
 - ii. Déterminer l'instant t où la concentration du médicament dans le sang est retombée à 75% de sa valeur maximale.
 - iii. Déterminer la concentration *moyenne* du médicament dans le sang dans les 8 premières heures après la prise.

G. Lorang