Question 1

(1) Points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$:

$$\begin{cases} y = x^3 & (1) \\ y = 7x + 6 & (2) \end{cases}$$

(2) dans (1) :

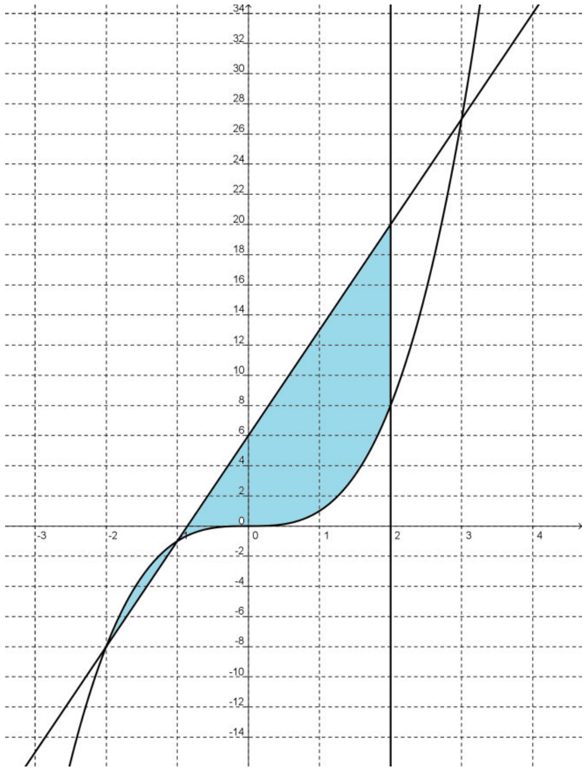
$$x^3 = 7x + 6 \Leftrightarrow x^3 - 7x - 6 = 0$$

C'est une équation du 3e degré : on cherche une solution évidente.

–1 est une racine du polynôme, donc il est divisible par $(x+1)$.

On factorise à l'aide du schéma de Horner et on trouve :

$$x^3 - 7x - 6$$
$$= (x+1)(x^2 - x - 6)$$
$$= (x+1)(x+2)(x-3)$$

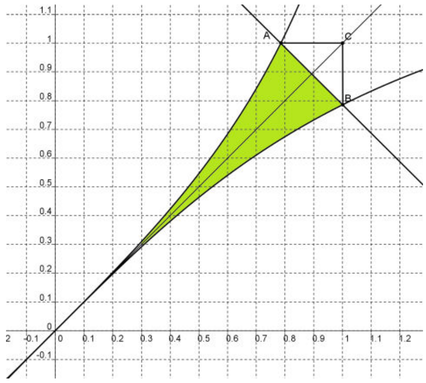


Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont donc : $(-2,-8)$, $(-1,-1)$ et $(3,27)$.

(2) Soit $f(x) = x^3 - 7x - 6$ et $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{7x^2}{2} - 6x$ une primitive de f. L'aire cherchée est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx - \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \\
&= F(-1) - F(-2) - F(2) + F(-1) \\
&= 2F(-1) - F(2) - F(-2) \\
&= 2\left(\frac{1}{4} - \frac{7}{2} + 6\right) - \left(\frac{16}{4} - \frac{28}{2} - 12\right) - \left(\frac{16}{4} - \frac{28}{2} + 12\right) \\
&= \frac{1}{2} - 7 + 12 - (4 - 14 - 12) - (4 - 14 + 12) \\
&= \frac{1}{2} + 5 + 20 = \frac{51}{2} \text{ u.a.}
\end{aligned}$$

Question 2



Il y a plusieurs façons de procéder. En utilisant la symétrie de la figure (les fonctions Arctan et tan sont réciproques l'une de l'autre) et en traçant la 1re bissectrice du repère (la droite d'équation $y = x$), on obtient l'aire cherchée :

$$\mathcal{A} = 2\int_0^1 x - \operatorname{Arctan} x \,\mathrm{d}x - \operatorname{aire}(ABC)$$

Calculs à part :

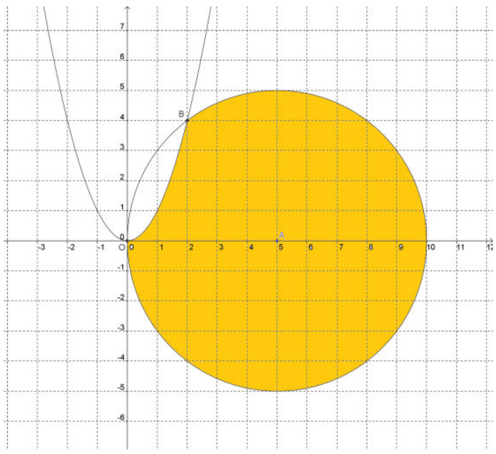
$$\begin{aligned}\int \operatorname{Arctan} x \,\mathrm{d}x &= x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\end{aligned} \quad \text{(par parties)}$$

$$\operatorname{aire}(ABC) = \frac{\left(1-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2} = \frac{1-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{16}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{32}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \left[x^2 - 2x \operatorname{Arctan} x + \ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{32}\right) \\ &= \left(1 - 2\cdot\frac{\pi}{4} + \ln 2\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{32}\right) \\ &= 1 - \frac{\pi}{2} + \ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} \\ &= \frac{1}{2} + \ln 2 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32}\end{aligned}$$

Question 3



Points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$:

$$\begin{cases} y = x^2 & (1) \\ \left(x-5\right)^2 + y^2 = 25 & (2) \end{cases}$$

(1) dans (2) :

$$\begin{aligned} &\left(x-5\right)^2 + x^4 = 25 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 10x + 25 + x^4 = 25 \\ \Leftrightarrow\ & x^4 + x^2 - 10x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x\left(x^3 + x - 10\right) = 0 \qquad (E) \end{aligned}$$

2 est une racine évidente du polynôme $p\left(x\right) = x^3 + x - 10$. Par Horner, on trouve : $p\left(x\right) = \left(x-2\right)\left(x^2 + 2x + 5\right)$. Le 2e facteur ne s'annule pas puisque son discriminant $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$. Par conséquent les solutions de (E) sont : $x_1 = 0$ et $x_2 = 2$.

Les points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ sont donc l'origine $\left(0,0\right)$ et $\left(2,4\right)$.

L'aire demandée s'obtient par soustraction :

$$\mathcal{A} = \pi \cdot 25 - \int_0^2 \sqrt{25-\left(x-5\right)^2} - x^2 \, \mathrm{d}x$$

Calcul à part :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \sqrt{25-\left(x-5\right)^2} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-5}^{-3} \sqrt{25-y^2} \, \mathrm{d}y \\ &= \int_3^5 \sqrt{25-y^2} \, \mathrm{d}y \\ &= \left[y\sqrt{25-y^2}\right]_3^5 + \int_3^5 \frac{y^2-25+25}{\sqrt{25-y^2}} \, \mathrm{d}y \\ &= -12 - \int_3^5 \sqrt{25-y^2} \, \mathrm{d}y + 25\int_3^5 \frac{\frac{1}{5}}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{5}\right)^2}} \, \mathrm{d}y \\ &= -12 - I + 25\left[\operatorname{Arcsin}\frac{y}{5}\right]_3^5 \end{aligned}$$

Substitution : $\begin{aligned} &y = x-5 \\ &\mathrm{d}y = \mathrm{d}x \\ &x = 0 \Rightarrow y = -5 \\ &x = 2 \Rightarrow y = -3 \end{aligned}$

Intégration par parties :

$$u = \sqrt{25-y^2} \qquad v' = 1$$

$$u' = \frac{-y}{\sqrt{25-y^2}} \qquad v = y$$

Donc :

$$\begin{aligned} 2I &= -12 + 25\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}\frac{3}{5}\right) \\ \Leftrightarrow I &= \frac{25\pi}{4} - \frac{25}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{3}{5} - 6 \end{aligned}$$

Revenons au calcul de l'aire :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \pi \cdot 25 - \int_0^2 \sqrt{25-\left(x-5\right)^2} - x^2 \, \mathrm{d}x \\ &= 25\pi - \frac{25\pi}{4} + \frac{25}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{3}{5} + 6 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 \\ &= \frac{75\pi}{4} + \frac{25}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{3}{5} + 6 + \frac{8}{3} \\ &= \frac{75\pi}{4} + \frac{25}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{3}{5} + \frac{26}{3} \quad \text{u.a.} \end{aligned}$$

Question 4

Calculer :

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{2x-1}{\sqrt{16-9x^2}} \, \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{9}\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{-18x}{\sqrt{16-9x^2}} \, \mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1-\left(\frac{3x}{4}\right)^2}} \, \mathrm{d}x = -\frac{2}{9}\left[\sqrt{16-9x^2}\right]_0^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}\left[\operatorname{Arcsin}\left(\frac{3x}{4}\right)\right]_0^{\frac{2}{3}} \\ &= -\frac{2}{9}\left(\sqrt{12}-\sqrt{16}\right) - \frac{1}{3}\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{4\sqrt{3}}{9} + \frac{8}{9} - \frac{\pi}{18} \end{aligned}$$

(2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x$

Posons :

$t = \tan\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\,\mathrm{Arctan}\,t$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\ ,\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\frac{8t^3}{\left(1+t^2\right)^3}} \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t -$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\left(1+t^2\right)^2}{4t^3}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{4t^3} + \frac{1}{2t} + \frac{t}{4}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[-\frac{1}{8t^2} + \frac{\ln t}{2} + \frac{t^2}{8}\right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\ln 3 + \frac{3}{8}\right) - \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\ln 3$$

(3) $\int \sin^2\left(2x\right)\cos\left(3x\right)\mathrm{d}x$

$$\frac{1}{2}\int \left[1-\cos\left(4x\right)\right]\cos\left(3x\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos\left(3x\right) - \cos\left(3x\right)\cos\left(4x\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{6}\sin\left(3x\right) - \frac{1}{4}\int \cos\left(7x\right) + \cos\left(x\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{6}\sin\left(3x\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}\sin\left(7x\right) + \sin\left(x\right)\right) + k$$

$$= \frac{1}{6}\sin\left(3x\right) - \frac{1}{28}\sin\left(7x\right) - \frac{1}{4}\sin\left(x\right) + k$$

sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Question 5

Soit f la fonction définie par : $f\left(x\right) = x\ln^2 x$.

(1) a) $\mathrm{dom}\, f = \mathrm{dom}_c\, f = \mathbb{R}_+^*$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln^2 x}{x^{-1}} \overset{"\frac{-\infty}{+\infty}"}{\underset{(H)}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2\ln x \cdot x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2\ln x}{-x^{-1}} \overset{"\frac{-\infty}{-\infty}"}{\underset{(H)}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2x^{-1}}{x^{-2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x = 0$

Donc $\mathcal{G}_f$ a un point creux en $\left(0,0\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f\left(x\right)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln^2 x = +\infty$

Donc $\mathcal{G}_f$ admet une B.P. de direction saymptotique (Oy) en $+\infty$.

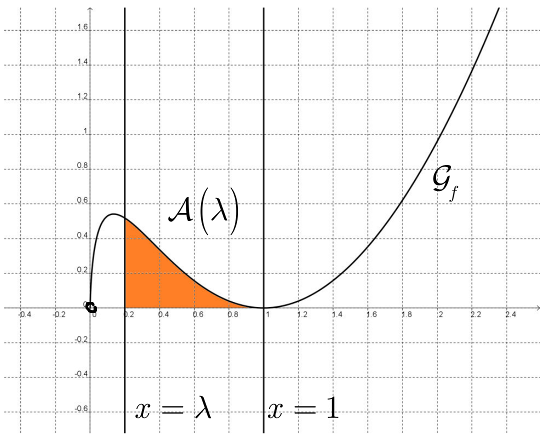
c) $\mathrm{dom}\, f\,' = \mathbb{R}_+^*$

$f'(x) = \ln^2 x + x \cdot 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln^2 x + 2\ln x = \ln x(\ln x + 2)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e^{-2}$

Tableau de variations

x	0		e^{-2}		1	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\Vert$	$0 \nearrow$	$\dfrac{4}{e^2}$ M	$\searrow$	0 m	$\nearrow +\infty$



(2) $\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ (f est toujours positive, 1 est une racine de f.)

Déterminons une primitive de f :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int x\ln^2 x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2\ln^2 x}{2} - \int x\ln x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2\ln^2 x}{2} - \left(\frac{x^2\ln x}{2} - \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x\right) + \frac{x^2}{4}(+k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\lambda) &= F(1) - F(\lambda) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{\lambda^2}{2}\left(\ln^2\lambda - \ln\lambda\right) - \frac{\lambda^2}{4}
\end{aligned}$$

Donc : $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} \mathcal{A}(\lambda) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\lambda^2\ln^2\lambda + \dfrac{1}{2}\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\lambda^2\ln\lambda$

$= \dfrac{1}{4} - 0 + 0 = \dfrac{1}{4}$ u.a. (par Hôpital)

I.G : Cette limite représente l'aire de la partie du plan comprise entre le graphe de f, l'axe des x et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.