Question 1

Voir manuel.

Question 2

(1) On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-4x} \cdot e^{x}$. Etant donné un réel ***strictement négatif*** a, calculer le volume $V(a)$ du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la surface délimitée par le graphe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ $(a < 0)$ et $x = 0$. Calculer ensuite $\lim\limits_{a \to -\infty} V(a)$.

Soit $a < 0$.

$$V(a) = \pi \cdot \int_a^0 [f(x)]^2 \, dx$$

$$= \pi \cdot \int_a^0 (1-4x) e^{2x} \, dx$$

par parties :

$u(x) = 1-4x \qquad v'(x) = e^{2x}$

$u'(x) = -4 \qquad v(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$

$$V(a) = \pi \cdot \left[(1-4x) \cdot \tfrac{1}{2} e^{2x} \right]_a^0 - \pi \cdot \int_a^0 (-2) e^{2x} \, dx$$

$$= \pi \cdot \left[\tfrac{1}{2} - (1-4a) \cdot \tfrac{1}{2} e^{2a} \right] + \pi \cdot \left[e^{2x} \right]_a^0$$

$$= \pi \cdot \left[\tfrac{1}{2} - (1-4a) \cdot \tfrac{1}{2} e^{2a} + 1 - e^{2a} \right]$$

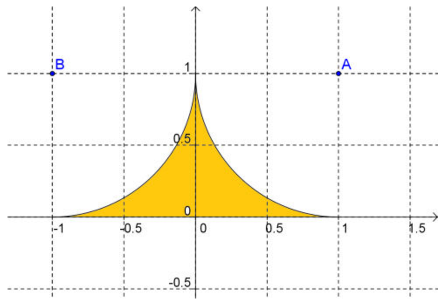
$$= \pi \cdot \left[\frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2} - 2a \right) e^{2a} \right] \quad u.v. \qquad \underline{\underline{2}}$$

$$\lim_{a \to -\infty} V(a)$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \pi \cdot \left[\frac{3}{2} - \underbrace{\frac{3}{2} e^{2a}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2a}{e^{-2a}}}_{\to 0} \right]$$

$$= \frac{3\pi}{2} \quad u.v. \quad \left(\text{en effet : } \lim \frac{2a}{e^{-2a}} \overset{H}{=} \lim_{a \to -\infty} \frac{2}{-2e^{-2a}} = 0 \right)$$

(2) On considère la surface du plan délimitée par les deux quarts de cercle de centres respectifs $A(1,0)$ et $B(-1,0)$ et de rayons 1 et l'axe des abscisses. Déterminer le volume du solide de révolution obtenu par la rotation autour de l'axe des abscisses de cette surface.



Equation du cercle de centre A :

$$\begin{aligned} &(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ \Leftrightarrow\ &(y-1)^2 = 1-(x-1)^2 \\ \Leftrightarrow\ &y-1 = \pm\sqrt{1-(x-1)^2} \\ \Leftrightarrow\ &y = 1 \pm \sqrt{1-(x-1)^2} \end{aligned}$$

Donc le volume est :

$$V = 2\pi \int_0^1 \left(1 - \sqrt{1-(x-1)^2} \right)^2 \mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \int_0^1 1 - 2\sqrt{1-(x-1)^2} + 1 - (x-1)^2 \, \mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \int_0^1 1 - x^2 + 2x - 2\sqrt{1-(x-1)^2} \, \mathrm{d}x$$

Calcul à part :

$$\int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2} \, \mathrm{d}x \qquad \text{On pose : } y = x-1\,,\ dy = dx$$

$$= \int_{-1}^0 \sqrt{1-y^2} \, \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-y^2} \, \mathrm{d}y \qquad \text{On pose : } y = \sin t\,,\ dy = \cos t \cdot dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos(2t) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

(C'était évident, car cette intégrale représente l'aire d'un quart de cercle de rayon 1...)

Donc :

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \left[x - \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 - 4\pi \left(\frac{\pi}{4} \right) \\
&= 2\pi \left(2 - \frac{1}{3} \right) - \pi^2 \\
&= \frac{10\pi}{3} - \pi^2 \ \text{ u.v.}
\end{aligned}
$$

Question 3

Calculer :

(1) $\int e^{2x} \operatorname{Arctan}\left(e^{x+1}\right) \mathrm{d}x$ (Indication : poser : $e^{x+1} = t$)

Effectuons la substitution suivante:

$$t = e^{x+1} \Leftrightarrow x + 1 = \ln t \Leftrightarrow x = \ln t - 1$$

$$dx = (\ln t - 1)' dt \Leftrightarrow dx = \frac{1}{t} dt$$

$$e^{2x} = (e^x)^2 = \left(\frac{e^{x+1}}{e} \right)^2 = \left(\frac{t}{e} \right)^2 = \frac{t^2}{e^2}$$

On obtient :

$$\int e^{2x} \arctan\left(e^{x+1}\right) dx = \int \frac{t^2}{e^2} \arctan t . \frac{1}{t} dt = \frac{1}{e^2} \int t \arctan t dt$$

Poursuivons maintenant au moyen de la méthode par parties :

$$g(t) = \arctan t \Rightarrow g'(t) = \frac{1}{1 + t^2}$$

$$f'(t) = t \Rightarrow f(t) = \frac{t^2}{2}$$

On obtient:

$$\int e^{2x} \arctan\left(e^{x+1}\right)dx = \frac{1}{e^2}\int t \arctan t\,dt = \frac{1}{e^2}\left(\frac{t^2}{2}\arctan t - \int \frac{t^2}{2\left(1+t^2\right)}dt\right)$$

$$= \frac{1}{2e^2}\left(t^2 \arctan t - \int \frac{t^2}{1+t^2}dt\right) = \frac{1}{2e^2}\left(t^2 \arctan t - \int \frac{\left(t^2+1\right)-1}{1+t^2}dt\right)$$

$$= \frac{1}{2e^2}\left(t^2 \arctan t - \int 1 - \frac{1}{1+t^2}dt\right) = \frac{1}{2e^2}\left(t^2 \arctan t - \left(t - \arctan t\right)\right) + k$$

$$= \frac{1}{2e^2}\left(t^2 \arctan t - t + \arctan t\right) + k = \frac{1}{2e^2}\left(e^{2x+2} \arctan e^{x+1} - e^{x+1} + \arctan e^{x+1}\right) + k$$

(2) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$ (Indication : poser $x = \dfrac{1}{t}$.)

$$I = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$$

Posons : $x = \dfrac{1}{t}$. On a : $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{t^2} \Longrightarrow dx = -\dfrac{1}{t^2}dt$

et $x = \sqrt{2} \Longrightarrow t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$x = 2 \Longrightarrow t = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned} I &= \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt \\ &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \\ &= = -\left[\text{Arcsin } t\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$