Nom : .... Prénom : ....

1B Devoir de mathématiques II,3 31.03.2014

Durée : 120' ***Calculatrice autorisée***

Question 1 11 (8+3) points

(1) ***Démontrer*** que : Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, alors la fonction $F : x \to \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a,b]$ et sa dérivée est f.

(2) Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction

$$G : x \mapsto \int_{\frac{1}{x}}^{2x} \ln t \,\mathrm{d}t$$

et calculer sa dérivée sur ce domaine.

Question 2 24 (=8+16) points

A. Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2 - \ln x + 1$.

(1) Déterminer le domaine de définition et de continuité de g.

(2) Déterminer les limites de g aux bornes du domaine de définition.

(3) Etudier les variations de g et dresser le tableau de variation de g.

(4) Donner le signe de $g(x)$.

B. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x + \frac{\ln x}{x} + 1$$

et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

(1) Déterminer le domaine de définition et de continuité de f.

(2) Déterminer les limites de f aux bornes du domaine. Rechercher toutes les asymptotes à $\mathcal{C}_f$ et préciser la nature des branches infinies.

(3) Calculer la dérivée de f et exprimer cette dérivée en fonction de $g(x)$.

(4) Etudier les variations de f en utilisant les résultats de la partie A.

(5) Etudier la concavité de $\mathcal{C}_f$. Le cas échéant, donner une équation de la tangente t à $\mathcal{C}_f$ en son point d'inflexion.

(6) Tracer $\mathcal{C}_f$ et la tangente t dans un repère orthonormé (unité de longueur 1 cm).

(Examen de fin d'études secondaires, septembre 2013)

Question 3 12 (=7+5) points

(1) Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$ et donner l'ensemble de solutions :

$$\left[2e^{x}\ln\left(3x\right)\right]^{2}+4<16e^{2x}+\ln^{2}\left(3x\right)$$

(Examen de fin d'études secondaires, juin 2013)

(2) Calculer l'intégrale définie : $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^{2}x\cos 3x\,\mathrm{d}x$

Question 4 13 (=8+5) points

Dans un repère orthonormé du plan, on considère l'ellipse d'équation

$$\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1\,,$$

avec $a>0$ et $b>0$.

(1) En s'inspirant du calcul d'aire du cercle par intégration, calculer l'aire de cette ellipse.

(2) a) Calculer le volume du solide engendré par la rotation de cette ellipse autour de l'axes des abscisses.

b) Sans aucun calcul supplémentaire, donner le volume du solide engendré par la rotation de la même ellipse autour de l'axes des ordonnées.

(D'après : examen de fin d'études secondaires, juin 2012)

G. Lorang