Nom : .... Prénom : ....

1CB1 Devoir de mathématiques II,2 26.03.2018

Durée : 110′ ***Calculatrice autorisée***

Question 1 7 points

Démontrer la propriété suivante du cours :

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, alors la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable sur $[a,b]$ et la dérivée de F est f.

Question 2 5 points

Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par les graphes des fonctions $f : x \mapsto \cos^2 x$ et $g : x \mapsto \sin^2 x$, et les droites d'équations $x = -\pi$ et $x = \frac{5\pi}{2}$. (On esquissera soigneusement le graphe des deux fonctions, mais il n'est pas nécessaire de faire une étude.)

Question 3 25 (=3+2+6+3+2+9) points

Soit la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x\left(\ln x - 1\right)^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

et soit $\mathcal{G}_f$ son graphe dans un repère orthonormé.

(1) Etudier la continuité de f en 0 et en déduire son domaine de continuité.

(2) Déterminer les asymptotes et branches paraboliques de $\mathcal{G}_f$, s'il y en a.

(3) Calculer la dérivée de f. Etudier en particulier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat. En déduire $\operatorname{dom} f'$ et les variations de f.

(4) Calculer la dérivée seconde de f et en déduire la concavité du graphe de f. Préciser les points d'inflexion éventuels et déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{G}_f$ en chaque point d'inflexion trouvé.

(5) Représenter graphiquement f et les tangentes de la question précédente dans un repère orthonormé.

(6) a) Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la surface fermée du plan délimitée par $\mathcal{G}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = e$, où λ est un réel donné tel que $0 < \lambda < e$. b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to 0} \mathcal{A}\left(\lambda\right)$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Tournez s.v.p.

Question 4 23 (=4+(7+3+9) points

A. Déterminer les primitives de $f : x \mapsto \sqrt{4-x^2}$, sur un intervalle à préciser. (**N.B.** : Le résultat doit être exprimé en fonction de x.)

B. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 2 et $\mathcal{P}_m$ la parabole d'équation $y = mx^2 - 2$, où m est un paramètre réel ***strictement positif***.

(1) Déterminer le ***nombre*** et les ***coordonnées*** des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{P}_m$, en discutant en fonction de m.

(2) On choisit $m = \frac{1}{8}$ dans cette question. Faire une figure avec $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}_{\frac{1}{8}}$. Déterminer l'aire de la partie fermée du plan comprise entre l'axe des abscisses et $\mathcal{P}_{\frac{1}{8}}$ et située à l'extérieur du cercle $\mathcal{C}$.

(3) a) Déterminer m_1 pour que $A(\sqrt{3},1)$ soit un point commun de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}_{m_1}$.

b) Déterminer m_2 pour que $B(\sqrt{2},\sqrt{2})$ soit un point commun de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}_{m_2}$.

c) Faire une figure avec $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}_{m_1}$ et $\mathcal{P}_{m_2}$.

d) Calculer l'aire de la partie fermée du plan comprise entre ces deux paraboles et située à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$. (Utiliser la question A.)

G. Lorang

Formules trigonométriques

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ $\qquad$ $\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ $\qquad$ $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\sin(\pi - x) = \sin x$ $\qquad$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$ $\qquad$ $\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\qquad$ $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\qquad$ $\cos(-x) = \cos x$

$\tan(\pi - x) = -\tan x$ $\qquad$ $\tan(\pi + x) = \tan x$ $\qquad$ $\tan(-x) = -\tan x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\qquad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$ $\qquad$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

$\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\qquad$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\qquad$ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ $\qquad$ $\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ $\qquad$ $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ $\qquad$ $\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$

$\sin p + \sin q = 2 \sin\frac{p+q}{2} \cos\frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin\frac{p-q}{2} \cos\frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos\frac{p+q}{2} \cos\frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin\frac{p+q}{2} \sin\frac{p-q}{2}$

$\tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$

$\tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$