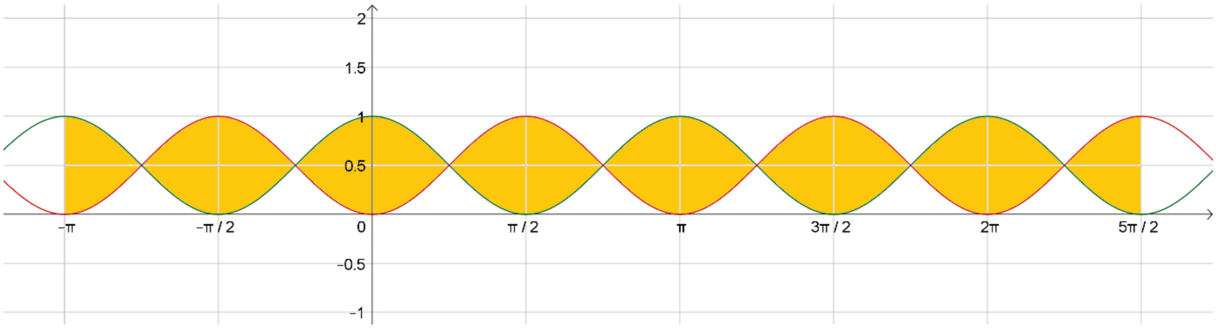
Nom : ....   Prénom : ....

1CB2 Devoir de mathématiques II,2 26.03.2018

Question 1

Représentation graphique : en vert : $\mathcal{G}_f$, et en rouge : $\mathcal{G}_g$



$$
\begin{aligned}
& f(x) = g(x) \\
& \Leftrightarrow \cos^2 x = \sin^2 x / : \cos^2 x \neq 0 \\
& \Leftrightarrow \tan^2 x = 1 \\
& \Leftrightarrow \tan x = \pm 1 \\
& \Leftrightarrow x = \tfrac{\pi}{4} + k \cdot \tfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

En utilisant la symétrie et la périodicité des graphes, l'aire cherchée vaut :

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{A} = 7 \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2 x - \sin^2 x \right) \mathrm{d}x \\
& = 14 \cdot \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, \mathrm{d}x \\
& = 7 \left[\sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
& = 7 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 7 \text{ u.a.}
\end{aligned}
$$

Question 2

(1) Continuité en 0 :

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} f(x) &= \lim_{x \to 0} x \left(\ln x - 1 \right)^2 \quad (\text{f.i. : } 0 \cdot \infty) \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\ln x - 1 \right)^2}{x^{-1}} \\
&\underset{H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{2 \left(\ln x - 1 \right) x^{-1}}{-x^{-2}} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{-2 \left(\ln x - 1 \right)}{x^{-1}} \\
&\underset{H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{-2x^{-1}}{-x^{-2}} \\
&= \lim_{x \to 0} 2x = 0 = f(0)
\end{aligned}
$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$, f est continue (à droite) en 0 et $\operatorname{dom}_c f = \mathbb{R}_+ = \operatorname{dom} f$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, donc pas d'A.H.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln x - 1\right)^2 = +\infty$, donc pas d'A.O.D., mais une B.P. de direction asymptotique (Oy) .

(3) $\left(\forall x \in]0,+\infty[\right)$:

$$f'(x) = \left(\ln x - 1\right)^2 + 2x\left(\ln x - 1\right)\frac{1}{x}$$
$$= \ln^2 x - 1$$
$$= \left(\ln x - 1\right)\left(\ln x + 1\right)$$

Dérivabilité en 0 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \left(\ln x - 1\right)^2 = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0 et $\mathcal{G}_f$ admet en $(0,0)$ une demi-tangente verticale.

$\operatorname{dom} f' =]0,+\infty[$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$ ou $\ln x = -1$

$\Leftrightarrow x = e$ ou $x = \dfrac{1}{e}$

Tableau de variations :

x	0		$1/e$		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$ (M)	$\searrow$	0 (m)	$\nearrow$	$+\infty$

Maximum : $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e}\left(\ln\dfrac{1}{e} - 1\right)^2 = \dfrac{4}{e}$

(4) $\operatorname{dom} f'' =]0,+\infty[$

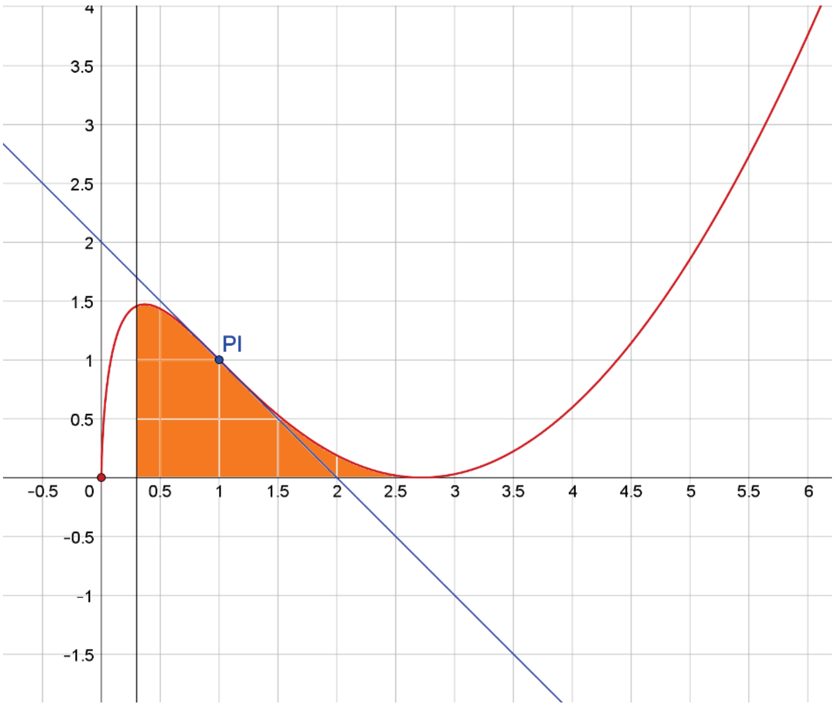
$f''(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$ et $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$\mathcal{G}_f$		$\frown$	P.I $(1,1)$	$\smile$	

Tangente au PI :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$\Leftrightarrow y = -\left(x-1\right)+1$$
$$\Leftrightarrow y = -x+2$$

(5) Représentation graphique :



(6) a) Calcul d'une primitive :

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int x\left(\ln x - 1\right)^2\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x^2}{2}\left(\ln x-1\right)^2 - \int x\left(\ln x - 1\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x^2}{2}\left(\ln x-1\right)^2 - \frac{x^2}{2}\left(\ln x-1\right) + \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x^2}{2}\left(\ln x-1\right)\left(\ln x-2\right) + \frac{x^2}{4} + k$$
$$= \frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - 3\ln x + \frac{5}{2}\right) + k \quad \text{sur }]0,+\infty[$$

I.P.P :

$u(x) = \left(\ln x - 1\right)^2$ $\qquad u'(x) = \dfrac{2(\ln x - 1)}{x}$

$v'(x) = x$ $\qquad v(x) = \dfrac{x^2}{2}$

$w(x) = \ln x - 1$ $\qquad w'(x) = \dfrac{1}{x}$

$v'(x) = x$ $\qquad v(x) = \dfrac{x^2}{2}$

Donc, comme f est positive :

$$\mathcal{A}\left(\lambda\right) = \int_\lambda^e f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{e^2}{2}\left(\ln^2 e - 3\ln e + \frac{5}{2}\right) - \frac{\lambda^2}{2}\left(\ln^2\lambda - 3\ln\lambda + \frac{5}{2}\right)$$
$$= \frac{e^2}{4} - \frac{\lambda^2}{2}\left(\ln^2\lambda - 3\ln\lambda + \frac{5}{2}\right) \qquad \text{u.a.}$$

Nom : .... Prénom : ....

b) On a :

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln^2\lambda-3\ln\lambda+\frac{5}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\lambda^2\ln^2\lambda\left(1-\underbrace{\frac{3}{\ln\lambda}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{5}{2\ln\lambda}}_{\to 0}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\lambda^2\ln^2\lambda=0$$

Calcul à part :

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda^2\ln^2\lambda$$
$$=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\ln^2\lambda}{\lambda^{-2}}$$
$$\overset{\frac{"+\infty"}{+\infty}}{\underset{H}{=}}\lim_{\lambda\to 0}\frac{2\ln\lambda\cdot\lambda^{-1}}{-2\lambda^{-3}}$$
$$=-\lim_{\lambda\to 0}\frac{\ln\lambda}{\lambda^{-2}}$$
$$\overset{\frac{"-\infty"}{+\infty}}{\underset{H}{=}}\lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda^{-1}}{2\lambda^{-3}}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda^2}{2}=0$$

d'après le calcul précédent.

Donc : $\lim\limits_{\lambda\to 0}\mathcal{A}(\lambda)=\dfrac{e^2}{4}$

Interprétation géométrique : c'est l'aire de la partie fermée du plan délimitée par l'axe des abscisses et le graphe de f.

Remarque : C'est bien $\int_0^e f(x)\,\mathrm{d}x$, puisque f est continue sur $[0,e]$. On pourrait ajouter que les primitives de f sur $\mathbb{R}_+$ sont toutes de la forme :

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}\left(\ln^2 x-3\ln x+\dfrac{5}{2}\right)+k & \text{si } x>0\\ k & \text{si } x=0\end{cases},\ \text{où } k \text{ est une constante.}$$

Question 3 — 22 (=4+(7+3+8) points

A. Intégration par parties :

$u(x)=\sqrt{4-x^2}$	$u'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$
$v'(x)=1$	$v(x)=x$

$$F(x)=\int\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=x\sqrt{4-x^2}+\int\left(\frac{x^2-4}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\right)\mathrm{d}x$$
$$=x\sqrt{4-x^2}-F(x)+4\int\frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\mathrm{d}x$$
$$=x\sqrt{4-x^2}-F(x)+4\,\mathrm{Arcsin}\frac{x}{2}$$

Donc :

$$\begin{aligned}&2F(x)=x\sqrt{4-x^2}+4\,\mathrm{Arcsin}\frac{x}{2}+k\\ \Leftrightarrow\ &F(x)=\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+2\,\mathrm{Arcsin}\frac{x}{2}+k'\end{aligned},\ \text{sur } [-2,2]$$

B. $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 4$ (1) et $\mathcal{P}_m : y = mx^2 - 2$ (2)

avec $m > 0$, donc la parabole a sa concavité tournée vers le haut.

(1) (2) dans (1) :

$$\begin{aligned}
& x^2 + \left(mx^2 - 2\right)^2 = 4 \\
& \Leftrightarrow m^2x^4 + x^2 - 4mx^2 + 4 = 4 \\
& \Leftrightarrow x^2\left(m^2x^2 + 1 - 4m\right) = 0 \\
& \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } m^2x^2 = 4m - 1 \\
& \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 = \frac{4m-1}{m^2}
\end{aligned}$$

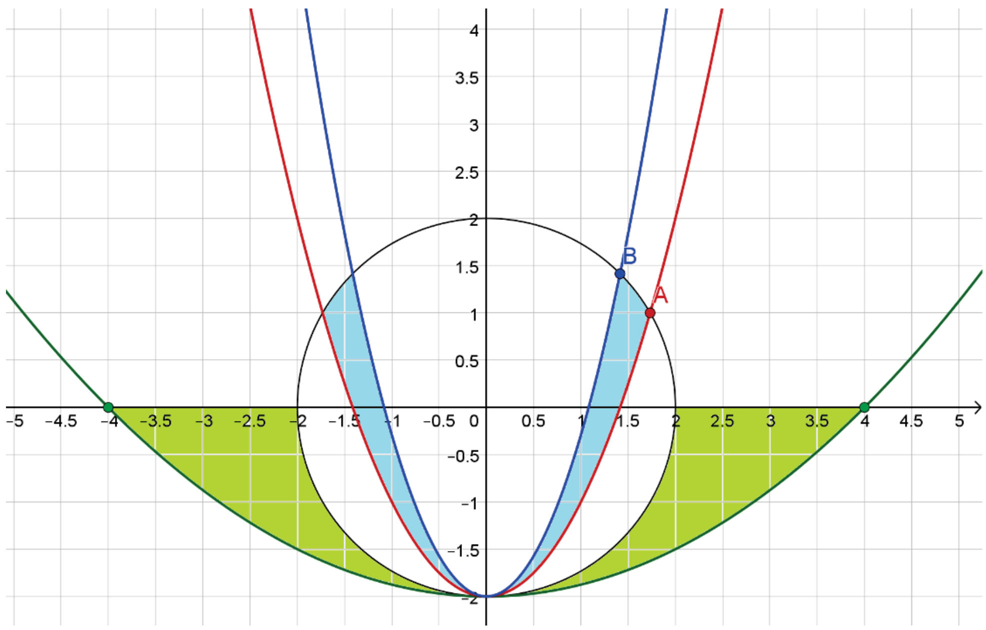
Donc :

- Si $4m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$, il y a un seul point d'intersection : $(0,-2)$
- Si $m = \frac{1}{4}$, il y a toujours un seul point d'intersection : $(0,-2)$
- Si $m > \frac{1}{4}$, il y a 3 points d'intersection (calcul de l'ordonnée évident !):

$$(0,0), \left(\frac{\sqrt{4m-1}}{m}, \frac{2m-1}{m}\right) \text{ et } \left(-\frac{\sqrt{4m-1}}{m}, \frac{2m-1}{m}\right).$$

(2) $\mathcal{P}_{\frac{1}{8}}$ en vert sur la figure ci-dessous. Points d'intersection avec (Ox) : $(-4,0)$ et $(4,0)$. Donc l'aire demandée (en vert) est :

$$\mathcal{A} = 2 \cdot \int_0^4 \left[0 - \left(\frac{1}{8}x^2 - 2\right)\right] \mathrm{d}x - \frac{\pi \cdot 4}{2} = 2 \cdot \left[2x - \frac{x^3}{24}\right]_0^4 - 2\pi = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) - 2\pi = \frac{32}{3} - 2\pi \text{ u.a.}$$



(3) a) $A(\sqrt{3},1) \in \mathcal{P}_{m_1} \Leftrightarrow 1 = m_1 \cdot 3 - 2 \Leftrightarrow m_1 = 1$

b) $B(\sqrt{2},\sqrt{2}) \in \mathcal{P}_{m_2} \Leftrightarrow \sqrt{2} = m_2 \cdot 2 - 2 \Leftrightarrow m_2 = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

c) Voir ci-dessus.

d) On peut « couper » par exemple en $x = \sqrt{2}$ et on utilise la parité des fonctions:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= 2 \cdot \int_0^{\sqrt{2}} \left(m_2 x^2 \cancel{-2} - m_1 x^2 \cancel{+2}\right) \mathrm{d}x + 2 \cdot \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left[\sqrt{4-x^2} - \left(m_1 x^2 - 2\right)\right] \mathrm{d}x \\
&= 2 \cdot \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{2}} \mathrm{d}x + 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{x}{2}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} - \left[\frac{2}{3}x^3 - 4x\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \\
&= 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3\sqrt{2}}\right]_0^{\sqrt{2}} + 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{3} - 1 - 2\frac{\pi}{4}\right) - \left(2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + 4\sqrt{2}\right) \\
&= \frac{4}{3} + \sqrt{3} + \frac{4\pi}{3} - 2 - \pi + 2\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{2}}{3} \\
&= \frac{\pi}{3} + 3\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} \text{ u.a.}
\end{aligned}$$