Question 1

(1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$ sont les vecteurs directeurs des deux droites. Donc :

$$AB \equiv \begin{cases} x = 1+k \\ y = k \\ z = 2-k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad CD \equiv \begin{cases} x = 3h \\ y = 1+2h \\ z = 1-2h \end{cases}, \text{ avec } h \in \mathbb{R}$$

b) Les deux droites ne sont pas parallèles car leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires :

$$\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \lambda \\ 2 = \lambda \\ -2 = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 2 = 3 \text{ impossible !}$$

c) $$AB \cap CD \equiv \begin{cases} x = 1+k = 3h & (1) \\ y = k = 1+2h & (2) \\ z = 2-k = 1-2h & (3) \end{cases}$$

On résout le système formé par les inconnues h et k :

(2) dans (1) : $1+1+2h = 3h \Leftrightarrow h = 2$ (4)

(4) dans (2) : $k = 5$ (5)

Vérifions si le système est compatible :

(4) et (5) dans (3) : $2-5 = 1-4$ VRAI !

Donc les deux droites sont sécantes et se coupent en $I(6,5,-3)$.

d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 1\cdot 3 + 1\cdot 2 + (-1)\cdot(-2) = 7 \neq 0$, donc les deux droites ne sont pas perpendiculaires.

(2) a) Equation du plan ABC :

$$\begin{aligned} & M(x,y,z) \in ABC \\ \Leftrightarrow\ & \det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y & 1 & 1 \\ z-2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\mathrm{C}_3 / \mathrm{C}_3 - \mathrm{C}_2) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -2 \\ y & 1 & 0 \\ z-2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -2(-y-z+2)=0$$
$$\Leftrightarrow y+z=2$$

b) $D \in ABC \Leftrightarrow y_D + z_D = 2 \Leftrightarrow 3-1=2$ VRAI ! Donc $D \in ABC$. On pouvait prévoir cette réponse : les droites AB et CD étant sécantes, il existe un plan unique les contenant.

Question 3

Soit la fonction

$$f : x \mapsto \frac{(1+2\ln x)^2}{x}$$

et $\mathcal{G}_f$ son graphe dans un repère orthonormé.

(1) C.E. : $x \neq 0$ et $x > 0$, donc $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}_+^*$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \cong 0{,}61$.

$\mathcal{G}_f$ est situé au-dessus de l'axe des abscisses car $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ f(x) \geq 0$. (Le numérateur et le dénominateur sont positifs sur le domaine.)

(2) Etude en 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(1+2\overbrace{\ln x}^{\to -\infty}\right)^2}{x} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty \Rightarrow A.V. : x = 0$$

Etude en $+\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+2\ln x)^2}{x} \\
&\underset{H}{\overset{\text{f.i.}\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2(1+2\ln x)\frac{2}{x}}{1} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{4(1+2\ln x)}{x} \\
&\underset{H}{\overset{\text{f.i.}\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{4\cdot\frac{2}{x}}{1} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{x} = 0 \Rightarrow A.H. : y = 0 \text{ à droite}
\end{aligned}$$

(3) f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^* \Rightarrow \operatorname{dom} f' = \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2(1+2\ln x)\frac{2}{x}\cdot x - (1+2\ln x)^2}{x^2} \\
&= \frac{4(1+2\ln x) - (1+2\ln x)^2}{x^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(1+2\ln x)(4-1-2\ln x)}{x^2}$$
$$= \frac{(1+2\ln x)(3-2\ln x)}{x^2}$$

On détermine les racines de f' :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1+2\ln x = 0 \text{ ou } 3-2\ln x = 0$$
$$\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \text{ ou } x = e^{\frac{3}{2}}$$

Ensuite on étudie le signe de $f'(x)$:

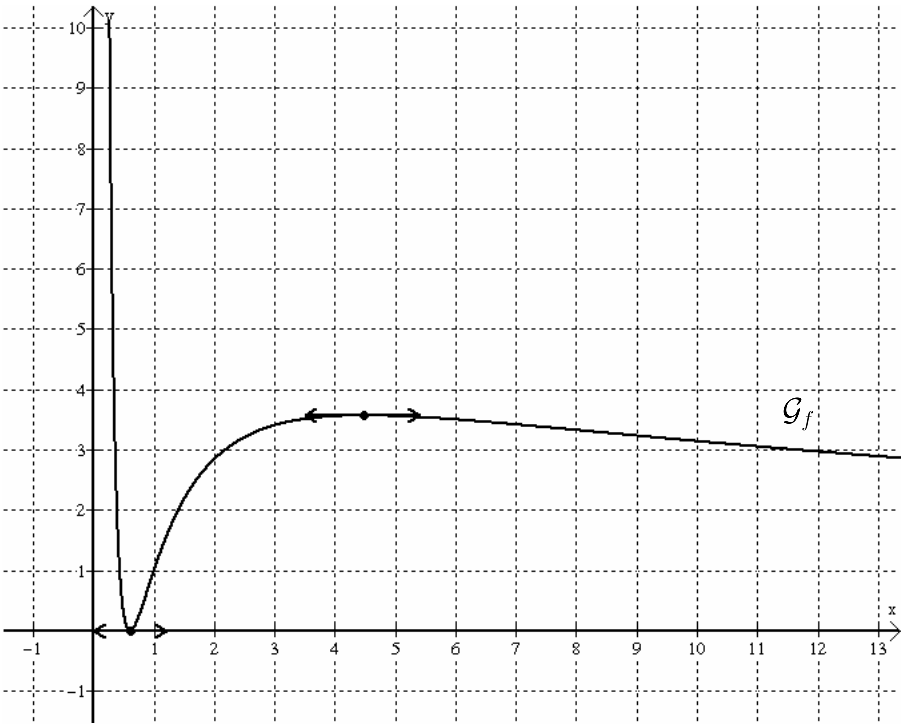
- $1+2\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{1}{2}}$
- $3-2\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x \leq e^{\frac{3}{2}}$

D'où le tableau du signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f :

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$		$e^{\frac{3}{2}}$	$-\infty$
$1+2\ln x$	$-$	0	$+$		$+$
$3-2\ln x$	$+$		$+$	0	$-$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	(m) 0	↗	$\frac{16}{e\sqrt{e}}$ (M)	↘ 0

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\left(1+2\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right)^2}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left(1+2\cdot\frac{3}{2}\right)^2}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{4^2}{e\sqrt{e}} = \frac{16}{e\sqrt{e}} \cong 3{,}57$$

(4) Représentation graphique :



Question 4

(1) Corrigé sur www.lmrl.lu :

$$CE : \begin{cases} 2x-1>0 \\ 3x-2x^2>0 \\ 4x-3>0 \\ x>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ 0<x<\frac{3}{2} \\ x>\frac{3}{4} \\ x>0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad D = \left]\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right[$$

$$\forall x \in \left[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right], \ (*) \Longleftrightarrow \ln \frac{(2x-1)^2}{3x-2x^2} > \ln \frac{4x-3}{x} \qquad | \ \ln \nearrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(2x-1)^2}{3x-2x^2} > \frac{4x-3}{x} \qquad \text{or} \ \begin{matrix} 3x-2x^2>0 \\ x>0 \end{matrix}$$

$$\Longleftrightarrow x(2x-1)^2 > (3x-2x^2)(4x-3)$$

$$\Longleftrightarrow 4x^3-4x^2+x > -8x^3+18x^2-9x$$

$$\Longleftrightarrow 12x^3-22x^2+10x>0$$

$$\Longleftrightarrow 2x(\underbrace{6x^2-11x+5}_{})>0$$

$$\Longleftrightarrow 2x\cdot f(x)>0$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{x\in\left]\frac{3}{4},\frac{5}{6}\right[\cup \left]1,\frac{3}{2}\right[= S}$$

D

x	$\frac{3}{4}$		$\frac{5}{6}$		1		$\frac{3}{2}$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$2x\cdot f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(2) Corrigé sur www.lmr.lu :

II. 3) $\ln\sqrt{2x+3} \leq \ln\sqrt{e} - \frac{1}{2}\ln(1-2x)$

C.E. ① $2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$

② $\sqrt{2x+3} > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$

③ $1-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

$D = \left]-\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}\right[$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(2x+3) \leq \frac{1}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln(1-2x) \quad |\cdot 2$$
$$\Leftrightarrow \ln(2x+3) \leq \ln e - \ln(1-2x)$$
$$\Leftrightarrow \ln(2x+3) + \ln(1-2x) \leq \ln e$$
$$\Leftrightarrow \ln\left[(2x+3)(1-2x)\right] \leq \ln e \qquad \boxed{a = e > 1}$$
$$\Leftrightarrow -4x^2-4x+3 \leq e$$
$$\Leftrightarrow -4x^2-4x+3-e \leq 0 \quad |\cdot(-1)$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+4x-(3-e) \geq 0$$

Les racines peuvent être calculées avec la V200 !

posons $4x^2+4x-(3-e)=0$

$$\Delta = 16+16(3-e) = 16\underbrace{(4-e)}_{>0} > 0$$
$$x = \frac{-4+4\sqrt{4-e}}{8} = \frac{-1+\sqrt{4-e}}{2} \simeq 0{,}066$$

ou

$$x = \frac{-1-\sqrt{4-e}}{2} \simeq -1{,}066$$

$$S = \left(\leftarrow ; \frac{-1-\sqrt{4-e}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{4-e}}{2} ; \rightarrow\right) \cap D$$
$$S = \left]-\frac{3}{2} ; \frac{-1-\sqrt{4-e}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{4-e}}{2} ; \frac{1}{2}\right[$$

(3) $\sqrt{27}^{x+1} > 4^x \;/\ln \;\Leftrightarrow (x+1)\ln 3^{\frac{3}{2}} > x\ln 4$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x+1)}{2}\ln 3 > 2x\ln 2$$
$$\Leftrightarrow 3x\ln 3 + 3\ln 3 > 4x\ln 2$$
$$\Leftrightarrow 3\ln 3 > 4x\ln 2 - 3x\ln 3$$
$$\Leftrightarrow 3\ln 3 > x\underbrace{(4\ln 2 - 3\ln 3)}_{=\ln 16 - \ln 27 < 0}$$
$$x > \frac{3\ln 3}{4\ln 2 - 3\ln 3}$$

Donc : $S = \left]\frac{3\ln 3}{4\ln 2 - 3\ln 3}, +\infty\right[$.

G. Lorang