1C1 — Corrigé du devoir de mathématiques II,2 — 23.03.07

Question 1

(1) $\Omega = \{\text{combinaisons de 6 boules choisies parmi 9}\}$; $\#\Omega = C_9^6 = 84$

$A =$ « tirer 3 boules blanches ou 4 boules blanches »

$\#A = C_4^3 C_5^3 + C_4^4\, C_5^2 = 50$; $P(A) = \frac{50}{84} \simeq 0{,}5952$

$B =$ « tirer au plus 2 boules noires » = « tirer exactement 2 boules noires »

$\#B = C_5^2 C_4^4 = 10$; $P(B) = \frac{10}{84} \simeq 0{,}119$

(2) $$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} \text{arrangements avec rép. de 2 lettres choisies parmi 26,} \\ \text{suivis des arrangements avec rép. de 4 chiffres choisis parmi 9} \end{array} \right\}$$

a) # de plaques contenant au moins une fois la lettre A, mais pas le chiffre 2

= # de plaques contenant 1 ou 2 fois A, mais pas le chiffre 2

$$= \underbrace{\underbrace{2}_{\text{pos. de A}} \cdot \underbrace{25}_{\text{autre lettre}} \cdot \underbrace{9^4}_{\text{pas de chiffre 2}}}_{\text{1·la lettre A}} + \underbrace{9^4}_{\substack{\text{2·la lettre A}\\ \text{mais pas de chiffre 2}}} = 334611$$

b) # de plaques contenant 4 chiffres distincts

$= 26^2 \cdot A_{10}^4 = 3407040$

(3) $\Omega = \{\text{permutations de 9 personnes}\}$; $\#\Omega = 9!$

$C =$ « les trois hommes se trouvent l'un derrière l'autre »

$$\#C = \underbrace{7}_{\text{pos. du 1er homme}} \cdot \underbrace{3!}_{\substack{\text{permutations}\\ \text{des 3 hommes}}} \cdot \underbrace{6!}_{\substack{\text{permutations}\\ \text{des 6 femmes}}}$$

$$P(C) = \frac{7 \cdot 3! \cdot 6!}{9!} = \frac{7 \cdot 6}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{6}{72} = \frac{1}{12} \simeq 0{,}0833$$

$D =$ « chaque homme est suivi de deux femmes »

$$\#D = \underbrace{3!}_{\substack{\text{permutations}\\ \text{des 3 hommes}}} \cdot \underbrace{6!}_{\substack{\text{permutations}\\ \text{des 6 femmes}}}$$ (les pos. des hommes et des femmes sont fixes !)

$$P(D) = \frac{3! \cdot 6!}{9!} = \frac{6}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{84} \simeq 0{,}0119$$

Question 2

(1) a) $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom}_c f = \mathbb{R}_+^*$.

b) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$.

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	‖ +	0	−

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\sqrt{x}} \overset{\text{f.i.}\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-\frac{1}{x\ln 2}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{2}{\sqrt{x}\ln 2} = 0$

Donc : $AH\colon y = 0$.

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\sqrt{x}} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

Donc : $AV : x = 0$.

d) $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x\ln 2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{\ln x}{\ln 2}}{x} = \frac{\ln x - 2}{2\ln 2 \cdot x\sqrt{x}}$$

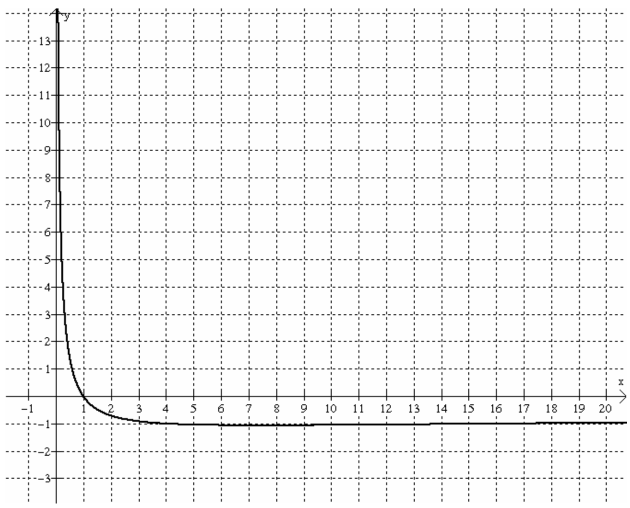
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 2 \Leftrightarrow x > e^2$

x	0	e^2	$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$ $-$	0	$+$
$f(x)$	$\parallel$ $+\infty$ $\searrow$	(m) $-\dfrac{2}{e\cdot\ln 2}$	$\nearrow$ 0

$$f\left(e^2\right) = \frac{\ln e^2}{-\ln 2\cdot e} = -\frac{2}{e\cdot\ln 2} \simeq -1{,}06.$$

e)



(2) Par parties :

$$\int f(x)dx = \int \frac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\sqrt{x}}dx \qquad u(x) = \log_{\frac{1}{2}} x \qquad v(x) = 2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$$

$$= 2\sqrt{x}\log_{\frac{1}{2}} x + \frac{2}{\ln 2}\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx \qquad u'(x) = -\frac{1}{x\ln 2} \qquad v'(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\sqrt{x}\log_{\frac{1}{2}} x + \frac{4\sqrt{x}}{\ln 2} + k = F(x)$$

L'aire à calculer vaut donc :

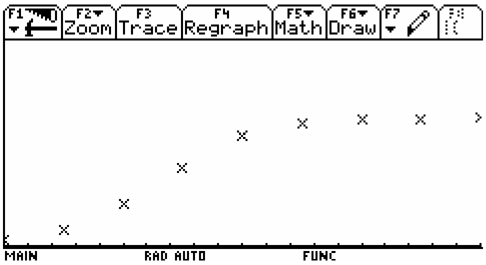
$$\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx - \int_{1}^{4} f(x)\,dx \underset{V200}{=} 8 - \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{\ln 2}$$

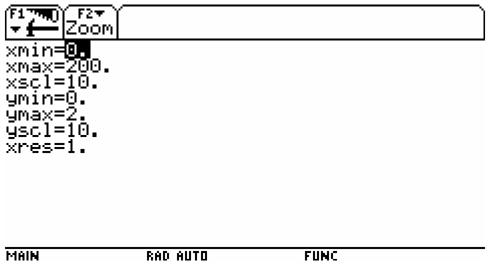
(3) On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \pi\int_{\frac{1}{2}}^{4} f^2(x)\,dx \\
&= \pi\int_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{1}{x}\left(\log_{\frac{1}{2}}^{2} x\right)dx \\
&= -\pi\ln 2\int_{\frac{1}{2}}^{4} -\frac{1}{x\ln 2}\left(\log_{\frac{1}{2}}^{2} x\right)dx \qquad u(x) = \log_{\frac{1}{2}} x \qquad u'(x) = -\frac{1}{x\ln 2} \\
&= \frac{-\pi\ln 2}{3}\left[\log_{\frac{1}{2}}^{3} x\right]_{\frac{1}{2}}^{4} \\
&\underset{V200}{=} 3\pi\ln 2
\end{aligned}$$

Question 3

(1) Avec la V200 :





(2) a) $f(0) = \dfrac{1}{a+b} = 0{,}05$ et comme $r > 0$: $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \dfrac{1}{a} = 1{,}25$

De la 2e équation on tire : $a = 0{,}8$. En remplaçant ce résultat dans la 1re équation, on obtient : $b = 19{,}2$. Donc finalement :

$$f(t) = \frac{1}{0{,}8 + 19{,}2e^{-rt}}\,,\ t \geq 0\,,$$

Seul le paramètre r reste donc inconnu.

b) $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}$ et

$$f'(t) = \frac{30re^{-rt}}{\left(e^{rt} + 24\right)^2} > 0\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Par conséquent f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$\operatorname{dom} f'' = \mathbb{R}$ et

$$f''(t) = \frac{30r^2e^{-rt}\left(24 - e^{rt}\right)}{\left(e^{rt} + 24\right)^3},\ t \in \mathbb{R}\,.$$

$$f''(t) = 0 \Leftrightarrow 24 - e^{rt} = 0 \Leftrightarrow e^{rt} = 24 \Leftrightarrow rt = \ln 24 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 24}{r}$$

$$f''(t) > 0 \Leftrightarrow 24 - e^{rt} > 0 \Leftrightarrow e^{rt} < 24 \Leftrightarrow rt < \ln 24 \Leftrightarrow t < \frac{\ln 24}{r}$$

Par conséquent :

t	0	$\dfrac{\ln 24}{r}$	$+\infty$
$f''(t)$	$+$	0	$-$
$\mathcal{G}_f$		PI	

Le point d'inflexion I a les coordonnées :

$$I\left(\frac{\ln 24}{r}, 0,625\right)$$

c) La vitesse de croissance du diamètre de l'épicéa au temps t est $f'(t)$. Or la dérivée de cette fonction est $f''(t)$, dont on vient d'étudier le signe. On peut donc dresser le tableau de variation de $f'(t)$:

t	0	$\dfrac{\ln 24}{r}$	$+\infty$
$f''(t)$	$+$	0	$-$
$f'(t)$	$\nearrow$	(M)	$\searrow$

La vitesse de croissance de l'épicea commence donc par croître pour atteindre un maximum au point d'abscisse $\ln 24/r$ et pour décroître ensuite. Au point d'inflexion I, la vitesse de croissance de l'épicéa est donc maximale.

d) Soit $d : y = kx + l$ la droite cherchée. Les points (50 ;0,41) et (75 ;0,76) appartiennent à d. D'où le coefficient directeur :

$$k = \frac{0,76 - 0,41}{75 - 50} = 0,014$$

Or, $0,41 = k \cdot 50 + l \Leftrightarrow l = -0.29$.

Donc : $d : y = 0,014x - 0,29$

$I \in d \Leftrightarrow 0,625 = 0,014 \cdot \dfrac{\ln 24}{r} - 0,29 \Leftrightarrow r \simeq 0,0486$

e) Pour juger finalement de la qualité du modèle basé sur la fonction f, on compare les valeurs observées avec celles du modèle :

t	0	25	50	75	100	125	150	175	200
Données	0,05	0,15	0,41	0,76	1,07	1,19	1,23	1,24	1,25
Modèle $f(t)$	0,05	0,154	0,402	0,769	1,054	1,185	1,230	1,244	1,248

Les données réelles diffèrant de celles du modèle d'au plus 10^{-2} (sauf pour $t = 100$), la fonction logistique f modélise très bien la croissance de l'épicea.

G. Lorang